ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 28 МАТЕМАТИКИ Выпуск 1
2021

А. С. Мараховский, **Е. Л. Торопцев** (Пятигорск, РЭУ им. Г.В. Плеханова, Ставрополь, СКФУ). **Решение задачи синтеза линейно-квадратичного регулятора для оптимизации параметров экономического роста.**

УДК 330.46

Резюме: Представлено решение задачи управления траекториями развития макроэкономических систем с помощью синтеза линейно-квадратичного регулятора, позволяющего оптимальным образом достигать сбалансированных темпов экономического роста.

Признательность. Статья подготовлена при финансовой поддержке РФФИ. Грант № 20-010-00084А. «Математическое моделирование структурной устойчивости и макроэкономической динамики».

Ключевые слова: макроэкономическая система, экономический рост, оптимальное управление, линейно-квадратичный регулятор, динамическая модель.

Постановка задачи.

Имеется две модели макроэкономических систем. Одна модель описывает развивающуюся экономику, стремящуюся достичь сбалансированных темпов экономического роста. Вторая модель является эталонной с точки зрения магистральных темпов роста. Основу моделей составляет динамический межотраслевой баланс В. Леонтьева [1]. Ставится вопрос, как с использованием инвестиций приблизить траектории развития первой модели ко второй эталонной модели. Решение этого вопроса стоит на пути синтеза линейно-квадратичного регулятора, позволяющего перевести траектории развития первой модели в магистральный режим эталонной модели.

Модель развивающейся макроэкономической системы:

$$\dot{x}(t) = B^{-1}(E - A - K)x(t) + B^{-1}u(t), \qquad x(0) = x_0, \tag{1}$$

здесь $x(t)$ — вектор валового выпуска; E — базовая матрица общей экономической структуры; A и K — постоянные доли промежуточного и конечного потребления; $\dot{x}(t)$ — скорость производства валового выпуска; B — матрица постоянных времени; $u(t)$ — инвестиции. Модель эталонной системы:

$$\dot{x}_m(t) = G_m x(t), \quad x_m(0) = x_{m0}, \tag{2}$$

здесь $x_m(t)$ — вектор валового выпуска магистральной системы; $\dot{x}_m(t)$ — скорость производства валовых выпусков в магистральной системе; G_m — матрица магистральной системы.

Уравнение разности двух процессов производства валового выпуска [2]:

$$y(t) = x_m(t) - x(t). \tag{3}$$

Дифференциальное уравнение разности:

$$\dot{y}(t) = (G_m - (G_m - B^{-1}(E - A - K))Z)y(t). \tag{4}$$

Требуется определить линейно-квадратичный регулятор Z [3]:

$$x(t) = -Zy(t), \tag{5}$$

доставляющий минимум квадратичному функционалу [4]:

$$J(x) = \int_0^{\infty} [y(t)^T Q y(t) + x(t)^T R x(t)]\, dt, \tag{6}$$

где Q — неотрицательно определенная, а R — положительно определенная диагональная матрица весовых коэффициентов. Весовые матрицы Q и R определяют соотношение между качеством регулирования (как быстро процесс $y(t)$ сходится к нулю) и затратами на управление.

Решение задачи. Составляем вспомогательный функционал, содержащий множители Лагранжа:

$$J(x) = \int_0^{\infty} \left[y^T Q y + x^T R x - 2\lambda^T(\dot{y} - G_m Y - (G_m - B^{-1}(E - A - K))x)\right] dt, \tag{7}$$

где λ — n-мерный вектор множителей Лагранжа.

Результатом минимизации этого функционала является система уравнений:

$$\begin{cases} \dot{y} = G_m y + (G_m - B^{-1}(E - A - K))x \\ \dot{\lambda} = -Qy - G_m^T \lambda \\ x = -R^{-1}(G_m - B^{-1}(E - A - K))^T \lambda \end{cases}, \tag{8}$$

в которой можно избавиться от x путем подстановки третьего уравнения системы в первое:

$$\begin{cases} \dot{y} = G_m y - (G_m - B^{-1}(E - A - K))R^{-1}(G_m - B^{-1}(E - A - K))^T \lambda \\ \dot{\lambda} = -Qy - G_m^T \lambda \end{cases}. \tag{9}$$

Полученная обобщенная система состоит из двух взаимозависимых подсистем в которых y и λ линейно связаны между собой и эту связь мы можем описать матрицей P:

$$\lambda = Py, \tag{10}$$

Воспользуемся этой связью для получения матричного алгебраического уравнения Риккати из (9), для чего умножим первое уравнение на P и вычтем из него второе уравнение:

$$PG_m + G_m^T P - P(G_m - B^{-1}(E - A - K))R^{-1}(G_m - B^{-1}(E - A - K))^T P + Q = 0. \tag{11}$$

Решением уравнения Риккати является матрица P при заданных матрицах Q и R. Если подставить пропорцию (10) в последнее уравнение системы (8), то получим выражение для оптимального управления валовым выпуском:

$$x = -R^{-1}(G_m - B^{-1}(E - A - K))^T P y = -Zy, \tag{12}$$

откуда $Z = R^{-1}(G_m - B^{-1}(E - A - K))^T P$.

Таким образом, мы получаем явную зависимость оптимального регулятора Z от матриц R и P.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Леонтьев В. В.* Экономическое эссе. Теории, исследования, факты и политика. М.: Политиздат, 1990, 415 с. // *Leont'ev V. V.* Ekonomicheskoe esse. Teorii, issledovaniya, fakty i politika. Moscov, Politizdat, 1990, 415 p. (in Russian).

2. *Мараховский А. С.*, *Торопцев Е. Л.* Оптимальное управление инвестициями в задаче приближения траекторий роста экономики к магистральным пропорциям.— Материалы Всероссийской научно-практической конференции «Теоретические и экспериментальные исследования в науке» (Пятигорск, 15 мая 2020 г.): сборник научных статей. Ставрополь: изд-во «Дизайн-студия Б», 2020, 464 с. // *Marakhovskii A. S.*, *Toroptsev E. L.* Optimal'noe upravlenie investitsiyami v zadache priblizheniya traektorii rosta ekonomiki k magistral'nym proportsiyam. — Materialy Vserossiiskoi nauchno-prakticheskoi konferentsii «Teoreticheskie i eksperimental'nye issledovaniya v nauke» (Pyatigorsk, 15 maya 2020 g.): sbornik nauchnykh statei. Stavropol': izd-vo «Dizain-studiya B», 2020, 464 p. (in Russian).
3. *Андреев Ю. Н.* Управление конечномерными линейными объектами. М.: Наука, 1976, 424 с. // *Andreev Yu. N.* Upravlenie konechnomernymi lineinymi ob"ektami. Moscov, Nauka, 1976, 424 p. (in Russian).
4. *Красовский А. А. и др.* Справочник по теории автоматического управления./ Под ред. А. А. Красовского. М: Наука. Гл. ред. физ.-матем. лит., 1987, 712 с. // *Krasovskii A. A. i dr.* Spravochnik po teorii avtomaticheskogo upravleniya./ Pod red. A. A. Krasovskogo. Moscov, Nauka. Gl. red. fiz.-matem. lit., 1987, 712 p. (in Russian).

UDC 330.46

Marakhovsky A. S., Toroptsev E. L. (Pyatigorsk, Plekhanov Russian University of Economics, Stavropol, NCFU)**. Solving the problem of synthesis of a linear-quadratic regulator for optimizing the parameters of economic growth**

Abstract: The paper presents a solution to the problem of managing the trajectories of the development of macroeconomic systems using the synthesis of a linear-quadratic regulator that allows optimal achievement of balanced economic growth rates.

Acknowledgments. The article was prepared with the financial support of the Russian Foundation for Basic Research. Grant №20-010-00084A "Mathematical modeling of stability and macroeconomic dynamics".

Keywords: macroeconomic system, economic growth, optimal management, linear-quadratic regulator, dynamic model.