

В. Г. В ы с о т и н а (Москва, ОПиПМ). **О признаках появления турбулентности по Прандтлю в закрученном течении воздуха в длинной трубе.**

УДК 533

Резюме: Выполнено изучение признаков появления турбулентности, описанных Прандтлем. Рассмотрены два вида структуры закрученного течения воздуха в длинной трубе: постоянный угол закрутки на входе в трубу и закон закрутки твердого тела. Получены профили осевой и окружной скоростей, имеющие точку перегиба. Появление турбулентности и структур закрученного течения, содержащих «распад вихря», было обусловлено движением потока в сторону повышенного давления. Угол закрутки изменялся в диапазоне 10–85 градусов. Использован метод Годунова.

Ключевые слова: воздух, распад вихря, закрутка, структура, постоянный угол закрутки, закон закрутки твердого тела (вынужденный вихрь), длинная труба, метод Годунова.

В работе изучаются признаки появления турбулентности в закрученном потоке воздуха в длинной трубе, полученные при задании двух видов закрутки на входе в трубу. Рассмотрены два случая задания закрутки $C_n \operatorname{tg}(\alpha) = \text{const}$, т. е. постоянное значение закрутки по высоте входного сечения канала, и закрутка по закону твердого тела $C_n \operatorname{tg}(\alpha) R_i/R$. Здесь α — угол закрутки, а C_n — нормальная к входному сечению скорость, R — внешний радиус трубы, R_i — текущий.

При всех прочих равных условиях для двух типов закрутки получены решения при значении отношения давлений $P_{\text{вых}}/P_0 = 0,990$ в диапазоне изменения угла закрутки $\alpha = 10^\circ \div 85^\circ$. Для расчетов использовался метод Годунова [1, 2, 3]. Постановка задачи опубликована в [1–3]. Моделирование закрученного течения воздуха выполнялось в осесимметричной трубе длиной 1 метр с радиусом 0,04 м [4]. Применена разностная сетка равномерная по длине и сгущающаяся к оси и внешнему обводу по радиусу, состоящая из 201×21 узлов. Используются параметры торможения:

$P_0 = 100500,8$ Па; $\rho_0 = 1,1945$ кг/м³; $\kappa = 1,4$; $RG = 287,15$ м²/(с² · °K); $Re \approx 10^4 - 10^5$.

Результаты изучения распада вихря в прямой трубе для постоянного во входном сечении угла закрутки $\alpha(\operatorname{tg}(\alpha) = \text{const})$ частично представлены в [5–8], там же представлено сравнение с опытными данными [4].

Согласно Прандтлю, «возникновение настоящей турбулентности происходит вследствие каких-либо причин, например начальных возмущений. Для возникновения неустойчивости в течении достаточно того, чтобы в потоке образовались такие распределения скоростей, профили которых имеют точку перегиба. Такие профили скоростей действительно получаются в потоках, в которых давление в направлении движения возрастает. Следовательно, такое возрастание давления действует как фактор, обуславливающий возникновение турбулентности» [13].

Итак, имеем закрученное течение, возникшее в трубе вследствие внешнего воздействия, которым является задание во входном сечении закрутки.

Линии двух рассмотренных типов закрутки во входном сечении канала для заданных углов $\alpha = 50^\circ, 80^\circ, 85^\circ$, показаны на рис. 1. Здесь 1 — постоянный угол закрутки $C_n \operatorname{tg}(\alpha) = \text{const}$, 2 — $C_n \operatorname{tg}(\alpha) R_i/R$ — закон твердого тела.

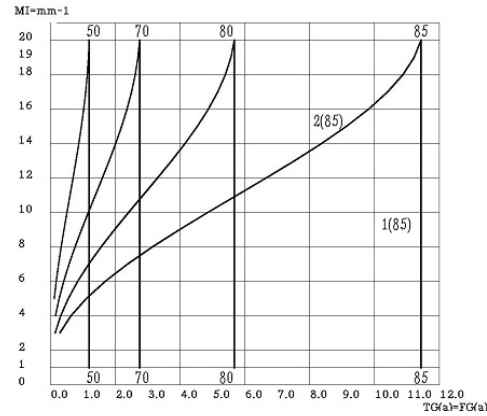


Рис. 1. Типы закрутки во входном сечении канала для заданного угла $\alpha = 50^\circ, 70^\circ, 80^\circ, 85^\circ$. 1 — $C_n \operatorname{tg}(\alpha), \operatorname{tg}(\alpha) = \operatorname{const}$. 2 — $C_n \operatorname{tg}(\alpha) R_i / R$ = вынужденный вихрь, закон твердого тела. C_n — нормальная к входному сечению скорость

На рис. 2 показаны кривые распределения числа Рейнольдса в канале в зависимости от угла закрутки $\alpha = 10^\circ \div 85^\circ$ для двух типов закрутки на входе. Число Рейнольдса, отношение сил инерции к силам трения, рассчитывается как $Re = UR/\nu$, где U — средняя скорость на входе, R — радиус, $\nu = \mu/\rho$ — коэффициент кинематической вязкости, $\mu = 1,7810^{-5}$ (н·сек/м²) — коэффициент динамической вязкости, ρ — плотность. Изменение значений числа Рейнольдса для постоянного угла закрутки ($C_n \operatorname{tg}(\alpha) = \operatorname{const}$) показано на рис. 2А). Для вынужденного вихря ($C_n \operatorname{tg}(\alpha) R_i / R$) на рис. 2В). Значения чисел Рейнольдса в данном исследовании таковы, что силы трения достаточно малы, и при моделировании закрученных течений в каналах ими можно пренебречь — рис. 2А и 2В.

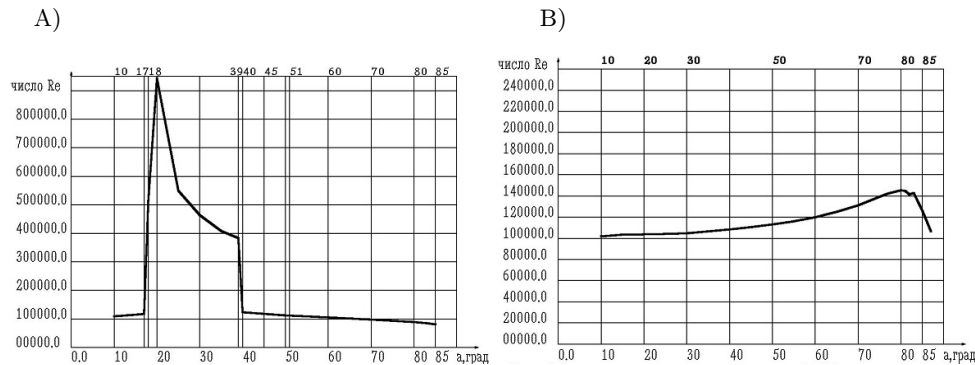


Рис. 2. Число Рейнольдса в зависимости от угла закрутки $\alpha = 10^\circ \div 85^\circ$. А) $C_n \operatorname{tg}(\alpha), \operatorname{tg}(\alpha) = \operatorname{const}$. В) $C_n \operatorname{tg}(\alpha) R_i / R$ — вынужденный вихрь. C_n — нормальная к входному сечению скорость

Распределение числа Рейнольдса для двух видов задаваемой во входном сечении канала закрутки в зависимости от угла закрутки сильно отличаются. Для постоянного по радиусу значения тангенса угла закрутки максимальные значения числа Рейнольдса расположены в первой половине канала в диапазоне углов $19^\circ \div 43^\circ$ и соответствуют отрицательным значениям расхода. Для типа закрутки по закону твердого тела максимум числа Рейнольдса находится в диапазоне углов $75^\circ \div 83^\circ$.

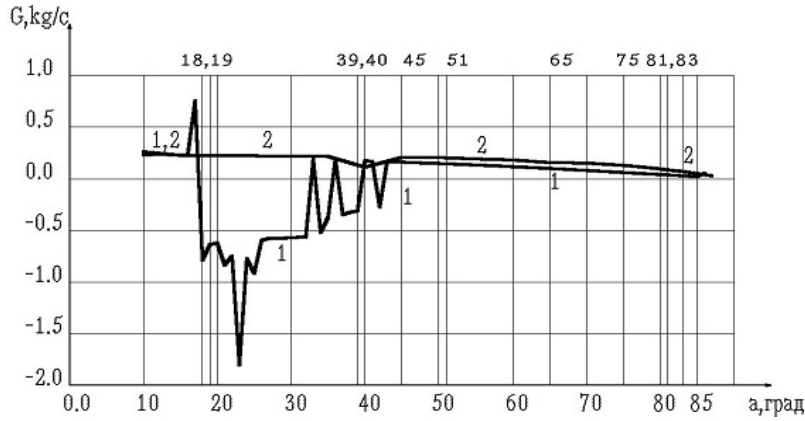


Рис. 3. Расход воздуха G (кг/сек) в зависимости от угла закрутки α на входе. Типы закрутки во входном сечении канала 1 — $C_n \operatorname{tg}(\alpha)$, $\operatorname{tg}(\alpha) = \operatorname{const}$. 2 — $C_n \operatorname{tg}(\alpha) R_i/R$ — вынужденный вихрь. C_n — нормальная к входному сечению скорость

Рис. 3. показывает, что в диапазоне углов закрутки $\alpha = 17^\circ \div 39^\circ$ для типа закрутки $\operatorname{tg}(\alpha) = \operatorname{const}$ имеют место отрицательные значения расхода. В диапазоне углов $\alpha = 34^\circ \div 43^\circ$ кривая расхода отличается неустойчивостью. Распределение расхода G для типа закрутки $\operatorname{tg}(\alpha) R_i/R$ — вынужденный вихрь, во всем диапазоне углов закрутки особенностей не имеет, за исключением наличия небольшого минимума в диапазоне углов $35^\circ \div 45^\circ$.

На рис. 4 приведены кривые изменения среднего по потоку значения завихренности $W_\theta = \partial C_r / \partial z - \partial C_z / \partial r$ в зависимости от угла закрутки α на входе для двух типов закрутки: 1 — $\operatorname{tg}(\alpha) = \operatorname{const}$ и 2 — $\operatorname{tg}(\alpha) R_i/R$ — вынужденный вихрь

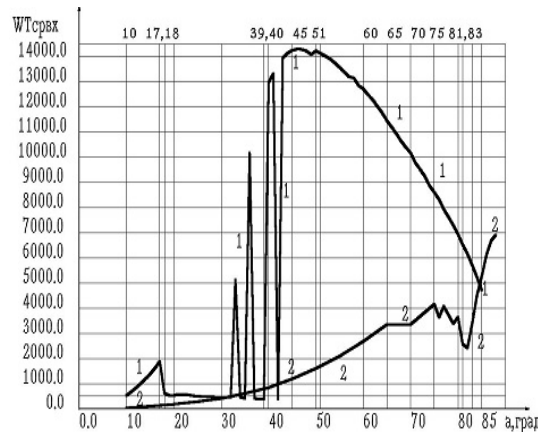


Рис. 4. Завихренность $W_{\theta \text{ ср}}$ (1/сек) в зависимости от угла закрутки α на входе. Типы закрутки во входном сечении канала 1 — $C_n \operatorname{tg}(\alpha)$, $\operatorname{tg}(\alpha) = \operatorname{const}$. 2 — $C_n \operatorname{tg}(\alpha) R_i/R$ — вынужденный вихрь. C_n — нормальная к входному сечению скорость

На рис. 4 видно, что для постоянного угла закрутки при значении угла закрутки $\alpha = 17^\circ$ имеется небольшой максимум W_θ . Неустойчивые значения W_θ имеют место в диапазоне углов закрутки $\alpha = 32^\circ \div 45^\circ$. Максимум кривой завихренности W_θ для $\operatorname{tg}(\alpha) = \operatorname{const}$ находится в диапазоне углов $\alpha = 45^\circ \div 51^\circ$. Для вынужденного вихря ($\operatorname{tg}(\alpha) R_i/R$) максимум завихренности W_θ имеется в диапазоне углов $\alpha = 70^\circ \div 80^\circ$, а минимум — в диапазоне углов $\alpha = 81^\circ \div 83^\circ$.

На рис. 5А и 5В представлены кривые средних значений давления во входном и

выходном сечении канала в зависимости от угла закрутки на входе $\alpha = 10^\circ \div 85^\circ$ градусов. Движение потока в сторону понижения давления происходит для обоих типов закрутки в диапазоне углов $\alpha = 10^\circ \div 41^\circ$. В этом диапазоне наблюдается ламинарное упорядоченное или смешанное течение. В диапазоне углов $\alpha = 42^\circ \div 85^\circ$ движение происходит в направлении более высокого давления на выходе, чем давление на входе. В результате в этом диапазоне углов закрутки ($\alpha = 42^\circ \div 85^\circ$) возникает неупорядоченное, возмущенное, турбулентное или смешанное течение, в том числе имеющее возвратно-циркуляционные зоны.

Из рис. 5 следует, что преобразование движения в сторону повышенного давления происходит для обоих типов закрутки после пересечения кривых давления (значение угла закрутки $\alpha \approx 40^\circ$) и расположения кривой давления на выходе $P_{\text{вых ср}}$ выше, чем кривая давления на входе $P_{\text{вх ср}}$. После пересечения кривых давления $P_{\text{вых ср}}$ принимает постоянное значение, а $P_{\text{вх ср}}$, начиная со значения $\alpha \approx 50^\circ$, возрастает (рисунок 5А). На рисунке 5В кривые $P_{\text{вых ср}}$ и $P_{\text{вх ср}}$ после пересечения убывают и имеют минимум в диапазоне углов $\alpha = 79^\circ \div 83^\circ$, при этом кривая давления $P_{\text{вых ср}}$ сохраняет значения выше кривой $P_{\text{вх ср}}$, которая убывает значительно быстрее. Число Рейнольдса для угла закрутки $\alpha = 40^\circ$, при котором происходит пересечение кривых давления, для $\text{tg}(\alpha) = \text{const}$ равно $Re = 123260$, а для вынужденного вихря — $Re = 108401$.

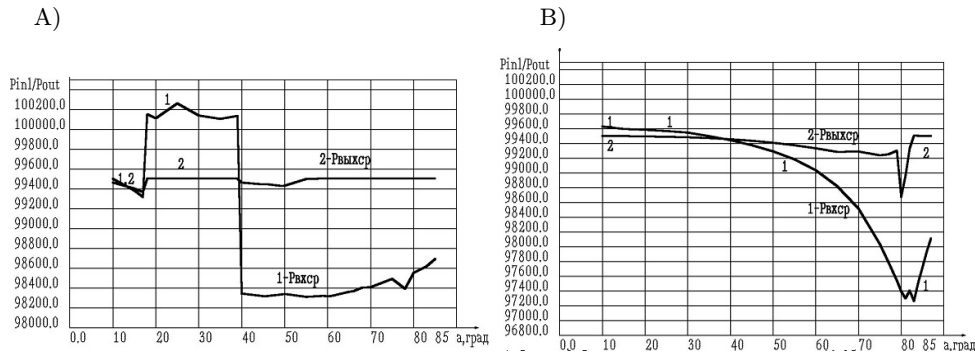


Рис. 5. Средние значения давления во входном ($P_{\text{вх ср}}$) и выходном ($P_{\text{вых ср}}$) сечениях канала в зависимости от угла закрутки $\alpha = 10^\circ \div 85^\circ$. А) — $C_n \text{tg}(\alpha)$, $\text{tg}(\alpha) = \text{const}$. В) — $C_n \text{tg}(\alpha) R_i/R$ = вынужденный вихрь. C_n — нормальная к входному сечению скорость.

На рисунке 6 показаны поля скоростей при $\alpha = 10^\circ$, представляющие собой пример ламинарных, упорядоченных течений без особенностей. Рис. 6А — $\text{tg}(\alpha) = \text{const}$ и рис. 6В — вынужденный вихрь

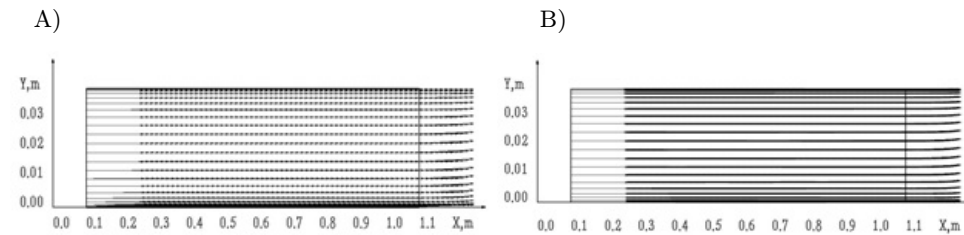


Рис. 6. Поля скоростей для угла закрутки $\alpha = 10^\circ$, А) вид закрутки $\text{tg}(\alpha) = \text{const}$; В) вид закрутки — вынужденный вихрь

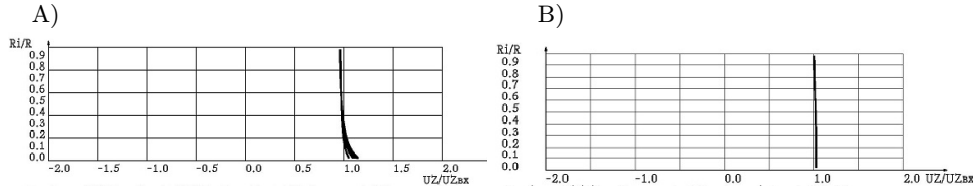


Рис. 7 Профили осевой скорости для угла закрутки $\alpha = 10^\circ$, А) вид закрутки $\text{tg}(\alpha) = \text{const}$; В) вид закрутки — вынужденный вихрь

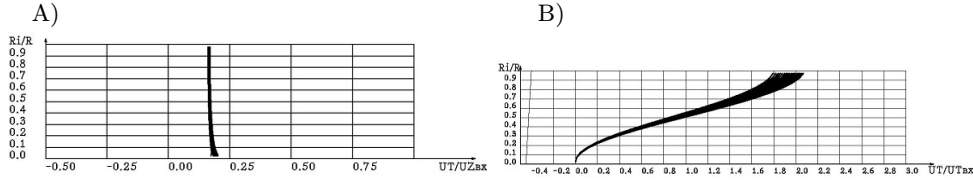


Рис. 8. Профили окружной скорости для угла закрутки $\alpha = 10^\circ$, А) вид закрутки $\text{tg}(\alpha) = \text{const}$; В) вид закрутки — вынужденный вихрь

На рис. 7 и 8 показаны соответствующие поля ламинарного течения профили осевой (рис. 7А, 7В) и окружной (рис. 8А, 8В) скоростей при $\alpha = 10^\circ$. Рис. 7А, 8А — $\text{tg}(\alpha) = \text{const}$ и (рис. 7В, 8В) — вынужденный вихрь. Профили осевой скорости для обоих видов закрутки и профиль окружной скорости для $\text{tg}(\alpha) = \text{const}$ представляют собой практически постоянные линии. Профиль окружной скорости для вынужденного вихря имеет точку перегиба даже при ламинарном течении.

Поля скоростей при $\alpha = 70^\circ$ показаны на рис. 9. Рисунок 9А $\text{tg}(\alpha) = \text{const}$ и рис. 9В вынужденный вихрь. Поле скоростей на рис. 9А представляет собой неупорядоченное турбулентное течение на расстоянии двух третей канала и ламинарное течение в последней четверти канала, имеющее замкнутую приосевую отрывную зону (распад вихря). На рис. 9В поле скоростей — это упорядоченное ламинарное течение, линии тока которого, немного смещены к верхнему обводу канала в области выходного сечения.

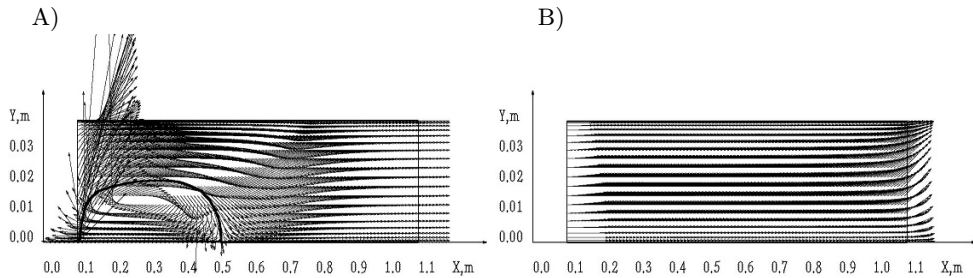


Рис. 9. Поля скоростей и соответствующие профили осевой и окружной скоростей для угла закрутки $\alpha = 70^\circ$, А) вид закрутки $\text{tg}(\alpha) = \text{const}$; В) вид закрутки — вынужденный вихрь

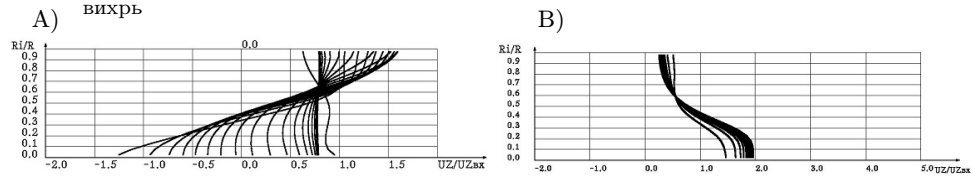


Рис. 10. Профили осевой скорости для угла закрутки $\alpha = 70^\circ$. А) вид закрутки $\text{tg}(\alpha) = \text{const}$; В) вид закрутки — вынужденный вихрь.

А) В)

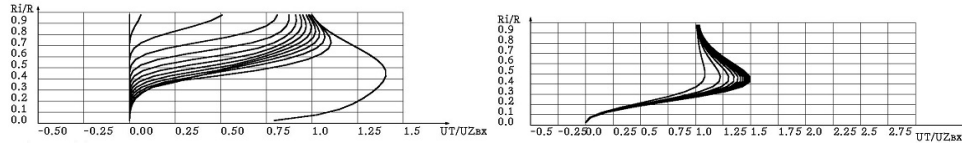


Рис. 11. Профили окружной скорости для угла закрутки $\alpha = 70^\circ$, А) вид закрутки $\text{tg}(\alpha) = \text{const}$; В) вид закрутки — вынужденный вихрь

На рис. 10 и 11 показаны профили осевой (рис. 10А, 10В) и окружной (рис. 11А, 11В) скоростей при $\alpha = 70^\circ$. (Рис. 10А, 11А) — $\text{tg}(\alpha) = \text{const}$ и (рис. 10В, 11В) — вынужденный вихрь. Профили осевой скорости для обоих видов закрутки и профиль окружной скорости для $\text{tg}(\alpha) = \text{const}$ имеют точки перегиба. Профиль окружной скорости для вынужденного вихря имеет вид параболы и не имеет точек перегиба.

Примером развитого турбулентного течения, имеющего развитую приосевую зону возвратно-циркуляционного течения (распад вихря — «пузырь»), является поле закрученного течения для угла закрутки $\alpha = 51^\circ$ и типа закрутки $\text{tg}(\alpha) = \text{const}$ (рис. 12А). Поле скоростей для $\alpha = 83^\circ$ и типа закрутки «вынужденный вихрь», имеющее сильное турбулентное течение с тороидальной зоной возвратно-циркуляционного течения (распад вихря — «тор») в первой трети канала и закрученное упорядоченное течение в остальной части канала, показано на рисунке 12В.

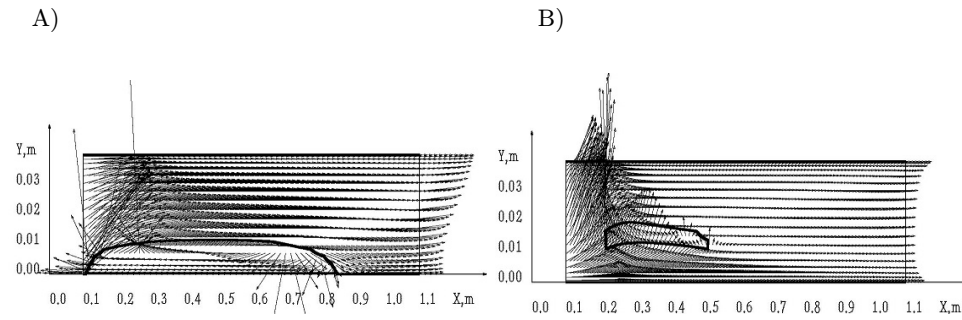


Рис. 12. Поля скоростей: А) $\alpha = 51^\circ$, вид закрутки $\text{tg}(\alpha) = \text{const}$; В) $\alpha = 83^\circ$, вид закрутки — вынужденный вихрь

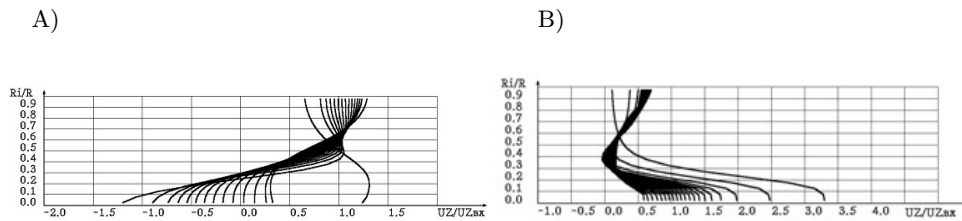


Рис. 13. Профили осевой скорости: А) для угла закрутки $\alpha = 51^\circ$, вид закрутки $\text{tg}(\alpha) = \text{const}$; и В) для угла закрутки $\alpha = 83^\circ$, вид закрутки — вынужденный вихрь.

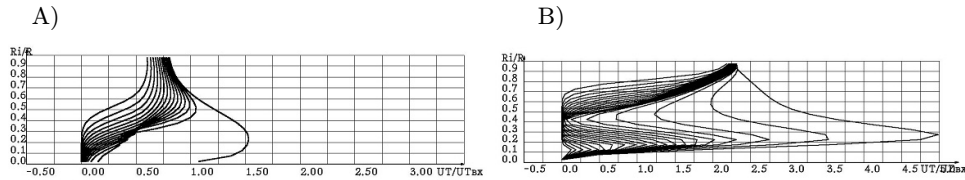


Рис. 14. Профили окружной скорости: А) для угла закрутки $\alpha = 51^\circ$, вид закрутки $\text{tg}(\alpha) = \text{const}$; и В) для угла закрутки $\alpha = 83^\circ$, вид закрутки — вынужденный вихрь

Все профили осевой (рис. 13А, В) и окружной (рис. 14А, В) скоростей как для угла закрутки $\alpha = 51^\circ$, вид закрутки $\text{tg}(\alpha) = \text{const}$, так и для угла закрутки $\alpha = 83^\circ$, вид закрутки — вынужденный вихрь, имеют точки перегиба.

Результаты, представленные в данной работе, показали, что начальные возмущения — задание определенного типа закрутки во входном сечении канала приводит к возникновению турбулентного течения в канале. Появление турбулентного течения зависит от заданного угла закрутки и типа закрутки — $\text{tg}(\alpha) = \text{const}$ или $\text{tg}(\alpha)R_i/R$. Образование профилей скорости, имеющих точку перегиба, не достаточно для возникновения неустойчивости в течении (рис. 8В и 10В). Профили скоростей, имеющие точки перегиба, не всегда получаются в потоках, в которых давление в направлении течения возрастает (рис. 11В). Однако, движение потока в направлении более высокого давления действительно обуславливает возникновение турбулентности — рисунки 9А и 12А, 12В.

REFERENCES

1. Годунов С. К., Забродин А. В., Прокопов Г. П. Разностная схема для двумерных нестационарных задач газовой динамики и расчет обтекания с отошедшей ударной волной. — ЖВМ и МФ, 1961, т. 1, № 3, с. 1020–1050. // *Godunov S. K., Zabrodin A. V., Prokopov G. P. The differential scheme for two-dimensional unsteady gas dynamic problems and a flow with departed air-blast calculation. — Computational mathematics and Mathematical physics Journal, Moscow, 1961, v. 1, № 3, p. 1020–1050.*
2. Дорфман Л. А. Численные методы в газодинамике турбомашин. Л.: Энергия, 1974. // *Dorfman L. A. The numerical methods in gas dynamics' turbo machines. Leningrad, Energy, 1974.*
3. Высотина В. Г. Моделирование течения невязкого газа в осесимметричных каналах с поворотом потока на 180 и 540 градусов. — Математическое моделирование, 1996, т. 8, № 10, с. 25–34. // *Vysotina V. G. The inviscid gas flow modeling in the axisymmetrical channels with stream's turns on 180 and 540 degrees. — The mathematical modeling Journal, Moscow, 1996, v. 8, № 10, p. 25–34.*
4. Shigeo Uchida, Yoshiaki Nakamura, Masataka Oshawa. Experiments on the Axisymmetric Vortex Breakdown in a Swirling Air Flow. — *Trans. Jap. Soc. Aeronaut and Space Sci.*, 1985, 27, № 78, p. 206–216.
5. Высотина В. Г. О моделировании осесимметричного распада вихря в трубе методом Годунова. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2014, т. 21, в. 1, с. 47–49. // *Vysotina V. G. Modeling of an axisymmetric vortex breakdown inside a pipe using Godunov's method. — OP&PM Surv. Appl. Ind. Math., Moscow, 2014, v. 21, is. 1, p. 47–49. (In Russian.)*

6. *Высотина В. Г.* Изменение локальных параметров потока воздуха при распаде вихря в трубе. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2015, т. 22, в. 4, с. 450–454. // *Vysotina V. G.* The local air parameters' variation of a vortex breakdown in a pipe. — OP&PM Surv. Appl. Ind. Math., Moscow, 2015, v. 22, is. 4, p. 450–454. (In Russian.)
7. *Высотина В. Г.* Численное исследование влияния отношений давлений на осесимметричный распад вихря в трубе методом Годунова. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2012, т. 19, в. 2, с. 242. // *Vysotina V. G.* The numerical investigation of the pressure ratio's influence was made on an axisymmetric vortex breakdown in a pipe. — OP&PM Surv. Appl. Ind. Math., 2012, v. 19, is. 2, p. 242–244. (In Russian.)
8. *Высотина В. Г.* Численное исследование структур распада вихря в длинной трубе. — Международная научная конференция по механике «Восьмые Поляховские чтения», 30 января–2 февраля 2018 г. Санкт-Петербург, Россия. Сборник тезисов, с. 103–104. // *Vysotina V. G.* The numerical investigation of structures of vortex breakdown in the long pipe. – International scientific conference on mechanics “The eighth Polyakhov's reading”, January 30–February 2, 2018, Saint Petersburg, Russia, Book of abstracts, p. 103–104.
9. *Высотина В. Г.* Зависимость структуры течения воздуха в длинной трубе от вида закрутки на входе. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2019, т. 26, в. 1, с. 67–71. // *Vysotina V. G.* The dependence of the flow structure inside the long pipe from the types of swirling at the entrance. — OP&PM Surv. Appl. Ind. Math., Moscow, 2019, v. 26, is. 1, p. 67–71. (In Russian.)
10. *Высотина В. Г.* Особенности структуры закрученного по закону твердого тела (вынужденный вихрь) течения воздуха в длинной трубе. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2019, т. 26, в. 3, с. 257–259. // *Vysotina V. G.* The structure's peculiarity of the flow inside the long pipe in such type of swirling as forced vortex law at the entrance. — OPPM survey on applied and industrial mathematics, Moscow, in Russia, 2019, v. 26, is. 3, p. 257–259.
11. *Гупта А., Лилли Д., Сайред Н.* Закрученные потоки. М.: Мир, 1987, 588 с. // *Gupta A. K., Lilley D. G., Syred N.* Swirl Flows. Tunbridge Wells: Abacus Press, 1984, xiii+475 p.
12. *Дж. Бэтчелор.* Введение в динамику жидкости. М.: Издательство «Мир», 1978, 655 с. // *Batchelor G. K.* An introduction to fluid dynamics. Cambridge at the university press, 1970, 758 p.
13. *Прандтль.* Гидроаэромеханика. М.: Издательство иностранной литературы, 1949, 520 с. // *Dr. Ludwig Prandtl.* Fuhrer durch die stromungslehre. Gottingen, 1944.

UDC 533

***Vysotina V. G.* (Moscow, Review of applied and industrial mathematics). About prandtl's evidence of a turbulence appearnce in a swirling flow inside a long pipe**

Abstract: Prandtl's evidence of a turbulence appearance in a swirling flow inside an axisymmetric constant-radius tube was investigated. The two types of swirling flows as constant angle swirl motion and solid-body like rotation (forced vortex motion) were set on at entrance in the long pipe. The profiles of axial and circumferential velocity components with cusps were obtained. An appearance of the turbulence and swirling structures contains the “vortex breakdown” depended on the motion in the direction of the higher pressure in the exit section. The swirl angles were changed from 100 to 870. For all solutions were retained similar conditions. Godunov's method was used for investigation.

Keywords: air, vortex breakdown, swirling, structure, constant angle, solid-body like rotation (forced vortex motion), long pipe, Godunov's method.