О Б О З Р Е Н И Е

П Р И К Л А Д Н О Й И П Р О М Ы Ш Л Е Н Н О Й

Т о м 28 М А Т Е М А Т И К И В ы п у с к 2

2021

В. Г. Б у р м и с т р о в а, А. А. Б у т о в, С. А. Х р у с т а л ё в (Ульяновск, УлГУ). **Математическая модель развития «коронавируса».**

УДК 51.76+519.248

Резюме: Работа посвящена построению и анализу математической модели прогнозирования динамики эпидемиологической ситуации, вызванной вирусом COVID-19 в Ульяновской области. Описание приводится в терминах точечных процессов с разладками и их компенсациями. С помощью имитационного моделирования была решена задача оптимизация параметров модели в рамках анализа ее адекватности.

Ключевые слова: COVID-19, задача оптимизации, прогнозирование, разладка, компенсация, точечные процессы, математическая модель.

Прогнозирование изменения числа инфицированных вирусом COVID-19 как в мире, так и в России в настоящее время является актуальной темой. В [1-3] приводятся различные способы моделирования распространения коронавируса. В данной работе рассматривается математическая модель прогнозирования динамики эпидемиологической ситуации, вызванной вирусом COVID-19. Анализ адекватности проводится на основе статистики заболеваемости коронавирусом в Ульяновской области с 20.03.2020 по 11.05.2021, взятой из открытого источника [4]. Описание математической модели приводится в терминах точечных процессов с разладками и их компенсациями.

Рассматриваются следующие случайные процессы: $S = (S_t)_{t\geqslant 0}$ — количество восприимчивых к заболеванию индивидуумов, $E = (E_t)_{t\geqslant 0}$ — количество инфицированных индивидуумов, заболевание которых протекает бессимптомно, $I = (I_t)_{t\geqslant 0}$ — количество инфицированных индивидуумов, $R = (R_t)_{t\geqslant 0}$ — количество перенесших заболевание индивидуумов, $D = (D_t)_{t\geqslant 0}$ — количество умерших от болезни индивидуумов. Предполагается, что в рассматриваемом периоде человек может переболеть только один раз. Численность восприимчивых к вирусу в момент t определяется следующим балансовым соотношением: $S_t = N_0 - E_t - I_t$. Константа N_0 соответствует общей численности населения Ульяновской области в начальный момент исследования (из [4] $N_0 = 1218319$). В первом приближении компенсаторы процессов I_t, E_t, R_t, D_t имеют вид: $\widetilde{I}_t = \int_0^t (\frac{\beta_u}{N0}(S_uI_u + S_uE_u) - R_u - D_u)du$, $\widetilde{E}_t = \int_0^t (\frac{k\cdot\beta_u}{N0}(S_uI_u + S_uE_u) - R_u - D_u)du$, $\widetilde{R}_t = \int_0^t (\gamma_u I_u + \sigma E_u)du$, $\widetilde{D}_0 t = \int_0^t \mu_u I_u du$. Параметр σ — интенсивность выхода из инкубационного периода, в среднем 14 дней, соответственно $\sigma = 0.07143$, параметр k характеризует долю людей переболевших бессимптомно и принимается равными $k = 0.35$. Кусочно-постоянные функции β_t, γ_t, μ_t характеризуют интенсивности заражения, выздоровления и смертности в момент t соответственно и имеют вид: $\beta_t = \sum_{i=1}^{\infty} \widetilde{\beta}_i I(\zeta_{i-1} < t \leqslant \zeta_i)$, $\gamma_t = \sum_- i = 1^{\infty} \widetilde{\gamma}_i I(\zeta_{i-1} < t \leqslant \zeta_i)$, $\mu_t = \sum_{i=1}^{\infty} \widetilde{\mu}_i I(\zeta_{i-1} < t \leq \zeta_i)$. Функция $I(\cdot)$ является индикаторной, ζ_i — моменты разладок или их компенсаций ($\zeta_0 = 0$, что соответствует дате начала исследования 20.03.2020, $\zeta_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \dots$). Параметры $\widetilde{\beta}_i \geqslant 0$, $\widetilde{\gamma}_i \geqslant 0$, $\widetilde{\mu}_i \geqslant 0$ определяют интенсивности заражения, выздоровления и смертности при $\zeta_{i-1} < t \leqslant \zeta_i$. Моменты ζ_i определялись методом оценивания по данным смертности от коронавируса по Ульяновской области с 20.03.20 по 30.11.20.

© Редакция журнала «ОПиПМ», 2021 г.

В результате были получены следующие значения: $\zeta_1 = 87$ (что соответствует дате 14.06.2020), $\zeta_2 = 149$ (соответствует дате 15.08.2020). Нахождение параметров модели осуществляется решением следующих задач:

$$\sum_{k=1}^{T}(D_{t_k} - y(t_k))^2 \to \min_{\widetilde{\mu}_i, \zeta_{i-1} < t_k \leq \zeta_i}, \tag{1}$$

где $y(t_k)$ — количество умерших от коронавируса к моменту сбора статистики t_k, T — соответствует дням исследования, $\widetilde{\mu}_i \in [0;1)$.

$$J(\widetilde{\beta}_i, \widetilde{\gamma}_i) = \sum_{k=1}^{T}((I_{t_k} - x(t_k))^2 + (R_{t_k} - z(t_k))^2) \to \min_{\widetilde{\beta}_i, \widetilde{\gamma}_i, \zeta_{i-1} < t_k \leq \zeta_i} \tag{2}$$

где $x(t_k)$ количество инфицированных COVID-19 к моменту t_k, $z(t_k)$ количество выздоровевших после заболевания коронавирусом к моменту t_k, $\widetilde{\beta}_i, \widetilde{\gamma}_i \in [0;1)$, $i = 1, 2, \ldots$ — номера моментов разладок и их компенсаций.

Для коэффициентов $\zeta_1 = 87$, $\zeta_2 = 149$ в результате решения задач (1), (2) были получены следующие значения параметров модели: $\widetilde{\mu}_1 = 0.0000589, \widetilde{\mu}_2 = 0.0000460, \widetilde{\mu}_3 = 0.0000488, \widetilde{\beta}_1 = 0.0999, \widetilde{\beta}_2 = 0.0715, \widetilde{\beta}_3 = 0.0449, \widetilde{\gamma}_1 = 0.00379, \widetilde{\gamma}_2 = 0.00448, \widetilde{\gamma}_3 = 0.00331$.

Решение задач (1), (2) осуществлялось методом компьютерного имитационного моделирования.

Настоящая модель позволяет осуществить экстраполяцию числа заболевших, умерших и выздоровевших. Её адекватность подтверждается статистически близкими значениями предсказанных моделью и наблюдаемых в реальной статистике величин.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Adekola H. A., Adekunle I. A., Egberongbe H. O., Onitilo S. A., Abdullahi I. N.* Mathematical modeling for infectious viral disease: The COVID19 perspective. J Public Affairs. 2020;e2306 10.1002/pa.2306
2. *Bauer F.* Mathematical epidemiology: Past, present, and future. Infectious Disease Modelling, 2017, 2(2), 113–127. 10.1016/j.idm.2017.02.001
3. *Sameni R.* Mathematical modeling of epidemic diseases; a case study of the COVID19 coronavirus. 2020, Arxiv, 1-17. https://arxiv.org/pdf/2003.11371.pdf
4. Статистика COVID-19 в Ульяновской области за все время: [Электронный ресурс]. URL: https://gogov.ru/covid-v-stats/uln (Дата обращения 11.05.2021). // COVID-19 statistics in the Ulyanovsk region throughout the time: [Electronic Resource]. URL: https://gogov.ru/covid-v-stats/uln (Data of viewing 11.05.2021) (In Russian.)

UDC 51.76+519.248

Burmistrova V. G., ***Butov A. A.***, ***Khrustalev S. A.*** (Ulyanovsk, Ulyanovsk State University). **Mathematical model of the coronavirus epidemic in the Ulyanovsk region.**

Abstract: In the paper we consider the construction and the analysis of the mathematical model for predicting the dynamics of the epidemiological situation caused by the COVID-19 virus in the Ulyanovsk region. The description is given in terms of point processes with change-points and their compensations. The optimal control problem of parameters of model is solved by the simulation method within the framework of the analysis of its adequacy.

Keywords: COVID-19, optimal control problem, forecast, change-point, compensation of the change-point, point processes, mathematical model.