О Б О З Р Е Н И Е
П Р И К Л А Д Н О Й И П Р О М Ы Ш Л Е Н Н О Й
Т о м 27 М А Т Е М А Т И К И В ы п у с к 1
2020

Е. М. Б о г а т о в (Старый Оскол, СТИ НИТУ МИСИС; Губкин, Губкинский филиал НИТУ МИСИС). **Об истории уравнения $\Delta u = ke^u$ и вкладе отечественных математиков.**

УДК 51 (091)

Резюме: Решая некоторые задачи дифференциальной геометрии в середине XIX в. Ж. Лиувилль вывел уравнение $\Delta u = ke^u$. Оно стало предметом внимания многих известных ученых — Э. Пикара, Д. А. Франк–Каменецкого, М. А. Красносельского, Я. Б. Рутицкого, И. М. Гельфанда и др. Наша цель — найти мотивацию и проследить эволюцию подходов к решению этого уравнения в разные периоды развития математики, а также оценить значение методов его исследования в соответствующих разделах математики и физики.

Ключевые слова: уравнение теплового взрыва, Лиувилль, Пикар, Франк–Каменецкий, Красносельский, Рутицкий, Гельфанд.

Уравнение

$$\Delta u = ke^u \tag{1}$$

было впервые рассмотрено Ж. Лиувиллем в его работах по дифференциальной геометрии середины XIX в.

В 1850 г. он показал (*Appl. de Analyse a la Geometrie par G. Monge*, *Notes IV*), что на поверхности S постоянной кривизны $\pm K/2\,(K > 0)$ с метрикой

$$ds^2 = \lambda(\alpha, \beta)(d\alpha^2 + d\beta^2),$$

где α и β — это так называемые «изотермальные» координаты поверхности, функция λ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \ln \lambda}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \ln \lambda}{\partial \beta^2} = \mp K\lambda,$$

которое равносильно (1).

В 1890 г. Э. Пикар применил к решению (1) метод последовательных приближений, осуществив переход от (1) к его интегральному аналогу

$$u(x,y) = -k \int_\Omega e^{u(\xi,\eta)} G(\xi,\eta) d\xi d\eta, \tag{2}$$

где $G(x,y)$ – функция Грина уравнения $\Delta u = 0$ в области Ω (*J. Math. Pure Appl.*, v. 6).

В 1897 г. Э. Ле Руа показал, что уравнением (1) может также описываться стационарный процесс распространения тепла при наличии тепловых источников мощностью $-ke^u$, где $k < 0$; u — температура нагретого тела. (*Ann. Sci. Ec. Norm. Super*, v. 14).

Исследования Пикара были продолжены в диссертации его ученика Г. Брату. В 1914 г. Брату опубликовал методы поиска малых решений (2) с учетом их возможных ветвлений (*Bulletin de la S. M. F.*, v. 42).

В конце 1930-х гг., описывая стационарный процесс теплового взрыва, советский физик Д. А. Франк–Каменецкий получил уравнение (1) для $k < 0$ [1, с. 96]. Для симметричных сосудов оно преобразовалось к виду

$$\frac{1}{\xi^\nu}\frac{d}{d\xi}\xi^\nu\frac{du}{d\xi} + ke^u = 0, \qquad 0 \leqslant \xi \leqslant L, \tag{3}$$

где $\nu = 0, 1, 2$; L — безразмерный параметр.

Уравнение (3) дополнялось следующими условиями:

$$u'(0) = u(L) = 0. \tag{4}$$

Численный анализ задач (3)–(4) привел Франк–Каменецкого к выяснению условий на параметр k, при которых они имеют одно или два решения [2, Гл. VII].

Дальнейшие теоретические исследования уравнений вида (1) были проведены уже в рамках функционального анализа. Появление в середине 1930-х гг. пространств Орлича L_M^* [1, с. 98] открывало дорогу для использования операторного подхода к анализу (2), отнесенных к уравнениям вида

$$Au = ku. \tag{5}$$

Этот подход, в рамках которого (в частности) удалось исследовать структуру решений уравнения (5) с оператором A из правой части (2) и доказать теорему о точках его бифуркации, был выработан М. А. Красносельским и его учеником Я. Б. Рутицким в 1950-х гг. [1, с. 99–102].

Еще одним инструментом, позволившим провести качественное исследование уравнений (1) и (2), явилась теория конусов, также созданная Красносельским [3] (при $k < 0$ физическая природа задачи подсказывала наличие положительных решений).

В конце 1950-х гг. анализ задачи (3)–(4) был проведен И. М. Гельфандом для $k = -2$. Используя инвариантность решений относительно группы преобразований

$$u(\xi, \alpha) = \alpha + u_0(\xi e^{\alpha/2}),$$

он нашел точки бифуркации задач (3)–(4) для плоского ($\nu = 0$), цилиндрического ($\nu = 1$) и сферического ($\nu = 2$) сосудов [4]. Гельфанд выяснил, что для $\nu = 0$ и $\nu = 1$ при $L < 0,66$ задача (3)–(4) имеет два решения, при $L = 0,66$ — одно решение, а при $L > 0,66$ решений нет. При $\nu = 2$ картина оказалась существенно более сложной [4, с. 142].

На этом история уравнения (1) не закончилась: в 1981 г. советский физик А. М. Поляков обнаружил его в математических моделях физики высоких энергий [5]. Исследуя квантовую геометрию бозонных струн, он ввел в рассмотрение так называемое *действие Лиувилля* по формуле

$$S[\varphi] = C\int_\Omega \left(0,5\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right] + \mu^2 e^\varphi\right) dxdy, \qquad C = \mathrm{const}\,.$$

Тогда уравнение движения, связанное с этим действием, сводится к (1).

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 20-011-00402.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Богатов Е. М.* Об истории развития нелинейных интегральных уравнений в СССР. Сильные нелинейности. — Науч. вед. БелГУ. Сер. Матем., Физ., 2017, № 6, в. 46, с. 93–106.
2. *Франк-Каменецкий Д. А.* Диффузия и теплопередача в химической кинетики. АН СССР, Ин-т хим. физики, М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1947, 367 с.

3. *Богатов Е. М.* Об истории положительных операторов (1900-е-1960-е гг.) и вкладе М. А. Красносельского. — Науч. вед. БелГУ. Сер. Прикладная матем., Физ., 2020, т. 52, № 2, в печати.

4. *Гельфанд И. М.* Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений. — УМН, 14:2 (86), 1959, с. 87–158.

5. *Polyakov A. M.* Quantum geometry of bosonic strings. — Phys. Lett., 103B (1981), p. 207-210.

УДК 51 (091)

Bogatov E. M. (Stary Oskol, STI nust MISA; Gubkin, Gubkinsky branch of the nust MISIS)**. On the history of the equation $\Delta u = ke^u$ and the contribution of domestic scientists**

Abstract: Solving some problems of differential geometry in the middle of the XIX century, J. Liouville derived the equation $\Delta u = ke^u$. It became the subject of attention of many famous scientists — E. Picard, D. A. Frank–Kamenetskii, M. A. Krasnoselskii, Ya. B. Rutitskii, I. M. Gelfand et al. Our goal is to find motivation and to trace the evolution of approaches to solving this equation at different periods in the development of mathematics and also evaluate the importance of methods for its investigation in the relevant sections of mathematics and physics.

Keywords: Gas cavitation, steam cavitation, three-phase bubble, electric field, electroluminescence.