О Б О З Р Е Н И Е
П Р И К Л А Д Н О Й И П Р О М Ы Ш Л Е Н Н О Й
Т о м 31 М А Т Е М А Т И К И В ы п у с к 1
2024

А. В. К а л и н к и н, **А. В. М а с т и х и н** (Москва, МГТУ им. Н. Э. Баумана). **Численные оценки вероятности остановки случайного блуждания на отрезке.**

УДК 519.21 DOI https://doi.org/10.52513/08698325_2024_31_1_**??**

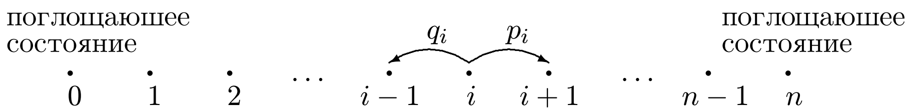
Резюме: Численно сравниваются две формулы для вероятности остановки на границе случайного блуждания.

Ключевые слова: Целочисленный отрезок, случайное блуждание.

На множестве состояний $\{0,1,2,\ldots,n\}$ рассматривается случайное блуждание S_t, $t=0,1,\ldots$. Переходные вероятности за один шаг равны, $i=1,\ldots,n-1$,

$$\mathbf{P}\{S_{t+1}=i-1|S_t=i\}=q_i,\ \mathbf{P}\{S_{t+1}=i+1|S_t=i\}=p_i,\ q_i>0, p_i>0,\ q_i+p_i=1,$$

$$\mathbf{P}\{S_{t+1}=0|S_t=0\}=1,\ \ \mathbf{P}\{S_{t+1}=n|S_t=n\}=1.$$



Переходные вероятности за t шагов обозначим $P_{ij}(t)=\mathbf{P}\{S_{t+1}=j|S_0=i\}$, $i,j=0,1,\ldots,n$. Для блуждания S_t состояния $0,n$ являются поглощающими. Рассматриваются вероятности остановки $q_{i0}^{(n+1)}=\lim_{t\to\infty}P_{i0}(t)$, $p_{in}^{(n+1)}=\lim_{t\to\infty}P_{in}(t)$ (ср. [**?**], [**?**]).

Теорема 1. *Вероятности остановки равны*

$$q_{i0}^{(n+1)}=\frac{q_1q_2\cdots q_ip_{i+1}\cdots p_{n-1}+q_1q_2\cdots q_{i+1}p_{i+2}\cdots p_{n-1}+\cdots+q_1q_2q_3\cdots q_{n-1}}{p_1p_2p_3\cdots p_{n-1}+q_1p_2p_3\cdots p_{n-1}+q_1q_2p_3\cdots p_{n-1}+\cdots+q_1q_2q_3\cdots q_{n-1}}.$$

Из соображений симметрии имеем

$$p_{in}^{(n+1)}=\frac{p_{n-1}p_{n-2}\cdots p_iq_{i-1}\cdots q_1+p_{n-1}p_{n-2}\cdots p_{i-1}q_{i-2}\cdots q_1+\cdots+p_{n-1}p_{n-2}p_{n-3}\cdots p_1}{q_{n-1}q_{n-2}q_{n-3}\cdots q_1+p_{n-1}q_{n-2}q_{n-3}\cdots q_1+p_{n-1}p_{n-2}q_{n-3}\cdots q_1+\cdots+p_{n-1}p_{n-2}p_{n-3}\cdots p_1},$$

очевидно $q_{i0}^{(n+1)}+p_{in}^{(n+1)}=1$.

В случае $q_i=q$, $p_i=p$, $i=1,\ldots,n-1$, $q+p=1$, получаем решение «классической задачи о разорении» ([**?**], гл. XIV, § 2, формула (2.4)). При $n=2$ и $n=3$ приходим к очевидным выражениям для вероятностей остановки.

S_t, $t=0,1,\ldots$, цепь Маркова с матрицей $P_{(n+1)\times(n+1)}$ вероятностей перехода за единицу времени; $p_\infty=\lim_{t\to\infty}(P^{\mathrm{T}})^tp_0$ [**?**], где вектор-столбец p_0

задает начальное распределение, и вектор p_∞ есть предельное распределение вероятностей.

Вычисление вероятностей остановки по формуле теоремы и формуле из теории цепей Маркова выполнены в случае $n = 4$. Имеем

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q_1 & 0 & p_1 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 & 0 & p_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Положим $q_1 = 0,1$, $q_2 = 0,5$, $q_3 = 0,2$. Начальное состояние цепи $S_0 = 2$, т.е. $p_0 = (0,0,1,0,0)$, и $p_\infty = (q_{20}^{(5)}, 0, 0, 0, p_{24}^{(5)})$ вектор финальных вероятностей. Теорема дает $q_{20}^{(5)} = 1/9 \approx 0,1111$; предельная формула, при приближении $t = 10$, дает $q_{20}^{(5)} \approx P_{20}(10) \approx 0,1055$.

Подстановка других значений параметров n, q_i, $i = 1, \ldots, n-1$, $t = 10, 20, 40$, при различных начальных условиях, дает близкие значения вероятностей остановки $q_{i0}^{(n+1)}$, при вычислениях двумя способами. Использован онлайн вычислитель www.wolframalpha.com.

Рассмотренную задачу о неоднородном случайном блуждании сформулировал Калинкин А. В., теорему 1 установил Мастихин А. В.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1. М.: Мир, 1984. 528 с.
2. *Калинкин А. В.* Вероятность остановки на границе случайного блуждания в четверти плоскости и ветвящийся процесс с взаимодействием частиц. — Теория вероятн. и ее примен., 2002, т. 47, в. 3, с. 452–474.
3. *Мастихин А. В.* Финальное распределение для марковского процесса эпидемии Гани. — Математические заметки, 2007, т. 82, в. 6, с. 873–884.

Поступила в редакцию
04.VIII.2024

UDC 531.21 DOI https://doi.org/10.52513/08698325_2024_31_1_**??**

Kalinkin A. V., Mastikhin A. V. (Moscow, Bauman Moscow State Technical University).

Numerical estimates of the probability of stopping a random walk on a segment.

Abstract: Two formulas for the probability of stopping at the boundary of a random walk are compared numerically.

Keywords: Integer segment, random walk.