ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 31 МАТЕМАТИКИ Выпуск 1
2024

А. О. Юлина (Санкт-Петербург, СПбГАСУ). **Вариационные задачи в работах О. И. Сомова.**

УДК 531.091 DOI https://doi.org/10.52513/08698325_2024_31_1_1

Резюме: В теоретической механике О. И. Сомов является одним из основателей общего аналитического метода постановки и решения фундаментальных задач кинематики и динамики.

Однако же работы академика Сомова незаслуженно забыты. Поэтому в данной работе мы попытаемся восполнить этот пробел. Научное наследие академика Сомова в статье будет представлено анализом таких вариационных задач механики, как брахистохрона и таутохрона.

Ключевые слова: О. И. Сомов, вариационные задачи, брахистохрона, таутохрона.

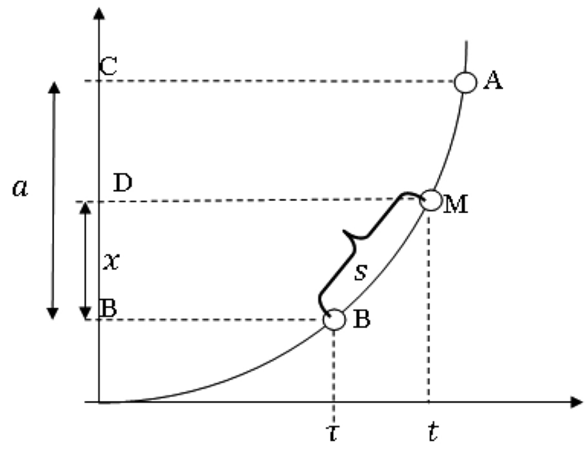
В 1869 году петербургский академик О. И. Сомов (1815–1876) не только упрощает решение задачи Абеля, но и приводит фундаментальный вывод о расширении задачи таутохроны с поля силы тяжести на любое потенциальное поле [1].

Для нахождения дуги, пройденной телом, в функции высоты, в том случае, когда время не зависит от высоты (таутохрона), Сомов не использует интегралы Эйлера. Он получает пройденную дугу с помощью простого преобразования переменных в двойном интеграле. В кинематической и динамической задаче он сразу же отказывается от декартовых координат, переходя на полярные координаты, избавляя читателя от бесконечных замен. После того, как Сомов приходит к результату Абеля, он показывает, что результаты Абеля можно применить к решению более общей задачи: «Найти кривую, описываемую точкой на поверхности какого ни есть вида, при действии на эту точку, силы, имеющей какой-нибудь потенциал, зная как выражается время движения в функции потенциала» [1]. Эта новаторская постановка задачи таутохроны на языке теории поля и ее решении с помощью элементов поля так и осталась не замеченной современниками!

Перескажем это блестящее решение О. И. Сомова.

I. Определение дуги, пройденной телом, в функции высоты.

« Пусть A означает начальное положение тела, AB его траекторию, M его положение в момент t, B положение в момент τ, $BD = x$ разность высот точек M и B, $BC = a$ разность высот точек A и B, g тяжесть, и s дугу BM. »



На основании теоремы об изменении кинетической энергии («по началу живых сил»), Сомов О. И. записывает:

$$\frac{ds}{dt} = -\sqrt{2g(a-x)}.$$

Откуда получает:

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^a \frac{ds}{\sqrt{a-x}}.$$

Далее записывает дугу s с помощью уравнения траектории, как некоторую неизвестную функцию $f(x)$: $s = f(x)$ и получает дифференциал дуги $ds = f^{'}(x)dx$. После интегрирования $\int_0^a \dfrac{ds}{\sqrt{a-x}}$ предполагает получить функцию a. Обозначает эту функцию через $\varphi(a)$ и получает уравнение:

$$\int_0^a \frac{f^{'}(x)dx}{\sqrt{a-x}} = \varphi(a), \tag{1}$$

из которого необходимо вывести $f(x)$.
Решает это уравнение следующим образом.

1. « Положим, что $x = a\sin^2\theta$, дабы освободить формулу которую следует интегрировать от радикала $\sqrt{a-x}$, и чтобы дать интегралу пределы, независимые от a. » После этой подстановки, уравнение (1) принимает вид:

$$2\int_0^{\pi/2} f^{'}(a\sin^2\theta)\sqrt{a}\sin\theta d\theta = \varphi(a). \tag{2}$$

2. Умножает обе части (2) на $\dfrac{da}{\sqrt{x-a}}$ и интегрируя от 0 до x находит:

$$2\int_0^x \frac{da}{\sqrt{x-a}} \int_0^{\pi/2} f^{'}(a\sin^2\theta)\sqrt{a}\sin\theta d\theta = \int_0^x \frac{\varphi(a)da}{\sqrt{x-a}} \tag{3}$$

3. Вводит полярные координаты точки ($r = \sqrt{a}, \theta$). Тогда левая часть уравнения (3) представляет собой двойной интеграл, определяющий площадь круга, описанного радиусом $\sqrt{x}$. Учитывая это, уравнение (3) запишется следующим образом:

$$4\int_0^{\sqrt{x}} \int_0^{\pi/2} \frac{f^{'}(r^2\sin^2\theta)r\sin\theta r dr d\theta}{\sqrt{x-r^2}} = \int_0^x \frac{\varphi(a)da}{\sqrt{x-a}} \tag{4}$$

4. Переходит от полярных координат к прямоугольным:

$$\xi = r\cos\theta, \eta = r\sin\theta.$$

Тогда левая часть уравнения (4) преобразуется в:

$$4\int\int \frac{f^{'}(\eta)^2\eta d\eta d\xi}{\sqrt{x-\xi^2-\eta^2}},$$

где интеграл относительно x Сомов О. И. берет в пределах от 0 до $\sqrt{x-\eta^2}$, а интеграл относительно η от 0 до $\sqrt{x}$.

Первое интегрирование:

$$\int_0^{\sqrt{x-\eta^2}} \frac{d\xi}{\sqrt{x-\xi^2-\eta^2}} = \arcsin(\frac{\xi}{\sqrt{x-\eta^2}})\Big|_0^{\sqrt{x-\eta^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

Второе интегрирование:

$$\pi\int_0^{\sqrt{x}} f^{'}(\eta^2)2\eta d\eta = \pi f(x).$$

4. Таким образом, уравнение (4) Сомов О. И. приводит к следующему:

$$\pi f(x) = \int_0^x \frac{\varphi(a)da}{\sqrt{x-a}}, \Rightarrow S = f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^x \frac{\varphi(a)da}{\sqrt{x-a}}.$$

Дуга, пройденная точкой, в функции высоты Сомовым О. И. найдена в таком же виде как и у Н. Х. Абеля.

II. После того, как Сомов приходит к результату Абеля, он показывает, что результаты Абеля можно применить к решению более общей задачи:

«Найти кривую, описываемую точкой на поверхности какого ни есть вида, при действии на эту точку, силы, имеющей какой-нибудь потенциал, зная как выражается время движения в функции потенциала»

Представим себе точку, на которую действует сила, имеющая потенциал u, под действием которой, точка движется по данной поверхности. Уравнение поверхности в обобщенных координатах q_1, q_2, q_3 имеет вид:

$$F(q_1, q_2, q_3) = 0.$$

Это уравнение и другое неизвестное определяют траекторию точки. Если к этому уравнению добавить выражение потенциала как функции координат q_1, q_2, q_3, то получим зависимость дуги s траектории от потенциала.

Сомов берет начало дуги s таким образом, чтобы при увеличении времени значение дуги уменьшалось. Тогда, по началу живых сил (теорема об изменении кинетической энергии), он получает:

$$\frac{ds}{dt} = -\sqrt{2u-2u_0},$$

Начальная скорость точки равна нулю, а u_0 — потенциал соответствующий начальной скорости. Из этого уравнения Сомов получает:

$$\tau = -{}_{u_0}^{u} \frac{\frac{ds}{du}\cdot du}{\sqrt{2u-2u_0}}.$$

Здесь τ это время движения по дуге s, ограниченной поверхностями уровня $u_0 u_1$. Далее автор выполняет замену переменных: $u_1 - u_0 = a, u - u_0 = a - x$, и тогда значение времени τ :

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{2}}{}_0^a \frac{\frac{ds}{dx}\cdot dx}{\sqrt{a-x}}.$$

Если эта величина τ приводится к заданной функции $\Phi(u_1)$ потенциала u_1 (по условию задачи), то по формуле

$$s =_0^x \frac{\varphi(a)da}{\sqrt{x-a}},$$

где $\varphi(a) = \sqrt{2}\Phi(u_1) = \sqrt{2}\Phi(u_0+a)$ зависимость дуги траектории от потенциала Сомов О. И. представляет в следующем виде:

$$S = \sqrt{2}\int_0^u \frac{\Phi(u_1)du_1}{\sqrt{u-u_1}}.$$

Если траекторией движения является таутохрона, то для $\sqrt{2}\Phi(u_1)$ Сомов получает постоянную величину, которую обозначает через A.

Окончательно, пройденная дуга в таутохронной задаче может быть выражена через разность потенциалов следующим образом:

$$S = A_0^u \frac{du_1}{\sqrt{u-u_1}} = 2A\sqrt{u-u_0}.$$

Таким образом, Сомов поставил и решил более общую задачу более лаконичным способом.

Практическое использование геометрического варьирования О. И. Сомов показывает на примере следующей задачи.

«Брахистохрона. Пусть будет точка (x, y), отнесенная к прямоугольным осям Ox и Oy и движущаяся в плоскости этих осей таким образом, что при всякой ее траектории движения скорость движения v есть данная функция $f(x)$ абсциссы.

Спрашивается: по какой кривой точка должна двигаться от A до B, чтобы пройти пространство AB в кратчайшее время.

Кривая, имеющая такое свойство, называется брахистохроною.»[2]

Рассмотрим решение автора.

Предположим, что B есть искомая брахистохрона, $A\mu B$ ее вариационное перемещение; причем $M\mu$ есть вариационное перемещение, которое получит точка M, если изменится только ордината y, т.е. если x останется постоянным, следовательно $M\mu = \delta y$.

Геометрической функцией (вектором) времени Сомов называет всякую прямую линию, изменяющею непрерывно со временем свою длину и направление, или только длину, или только направление [3].

Способ, по которому изменяется длина и направление геометрической функции, зависит от движения ее начала и конца. Скорость движения точки M — геометрическая производная функции первого порядка.

Перемещение $M\mu = \delta y$ есть геометрическая функция переменной x, сохраняющая свое направление, параллельное оси Oy; поэтому ее геометрическая производная по x есть $\dfrac{d\delta y}{dx}$. Она геометрически равна (или векторно равна) геометрической вариации скорости $\dfrac{ds}{dx}$, с которой точка будет двигаться по линии AB, если время движения равно x. Следовательно проекция $\dfrac{d\delta y}{dx}$ на ds, проведенная по касательной в точке к кривой AMB, равна $\delta\dfrac{ds}{dx}$ [4]. Так как косинус угла этой касательной с осью Oy есть $\dfrac{dy}{ds}$, то

$$\frac{d\delta y}{dx}\cdot\frac{dy}{ds} = \delta\frac{ds}{dx}.$$

Время t есть некоторая функция x, поэтому

$$\frac{ds}{dx} = v\cdot\frac{dt}{dx}.$$

По условию задачи $v = F(x)$. Следовательно

$$\delta \frac{ds}{dx} = \delta\big[F(x) \cdot \frac{dt}{dx}\big] = F(x) \cdot \delta \frac{dv}{dx} = F(x) \frac{d\delta t}{dx}$$

и

$$\frac{d\delta y}{dx} \cdot \frac{dy}{ds} = F(x) \cdot \frac{d\delta t}{dx};$$

отсюда Сомов делает вывод

$$\frac{d\delta t}{dx} \cdot dx = \frac{1}{F(x)} \cdot \frac{dy}{ds} \cdot \frac{d\delta y}{dx} \cdot dx = d\big(\frac{1}{F(x)} \frac{dy}{ds} \cdot \delta y\big) - d\big(\frac{1}{F(x)} \cdot \frac{dy}{ds}\big) \cdot \delta y.$$

Далее, преобразует это выражение, учитывая условие минимальности времени и получает:

$$\frac{1}{F(x)} \cdot \frac{dy}{ds} = \text{c}$$

где c — постоянная величина. Последнее уравнение показывает замечательное свойство *брахистохроны*: *отношение скорости движения к косинусу угла, ею составляемого с осью Oy постоянно.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Юлина А. О.* Таутохрона О. И. Сомова. — История и педагогика естествознания, 2023, № 2, с. 41–44.
2. *Сомов О. И.* Рациональная механика. Кинематика. С-Петербург. Типография Императорской Академии Наук, 1872, 491 с.
3. *Юлина А. О.* Механика О. И. Сомова. — История науки и техники, 2023, № 2, с. 3–7.
4. *Юлина А. О.* Векторное исчисление в механике Сомова. — История науки и техники, 2023, № 3, с. 26–33.

Поступила в редакцию
23.VI.2024

UDC 531.091 DOI https://doi.org/10.52513/08698325_2024_31_1_1

A. O. Yulina (St. Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering, St. Petersburg.)
. Variational problems in the works of academician O. I. Somova.

Abstract: In theoretical mechanics O. I. Somov is one of the founders of the general analytical method for setting and solving fundamental problems of kinematics and dynamics.

However, the works of Academician Somov are undeservedly forgotten. Therefore, in this paper we will try to fill this gap. The scientific heritage of Academician Somov in the article will be presented by the analysis of such variational problems of mechanics as brachistochrone and tautochrone.

Keywords: O. I. Somov, variational problems, brachistochrone, tautochrone.