ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 31 МАТЕМАТИКИ Выпуск 2
2024

Г. Ю. Ермоленко, **О. В. Мкртычев** (Новороссийск, НФ БГТУ им. В. Г. Шухова). **Определение напряжённо-деформированного состояния строительных конструкций с использованием метода опорных функций.**

УДК 539.3 DOI https://doi.org/10.52513/08698325_2024_31_1_1

Резюме: В данной работе излагается метод определения напряжённо-деформированного состояния строительных конструкций, частный случай решения задач математики и механики, с использованием метода опорных функций. Идея метода излагается на примере решения задачи Коши для ОДУ.

Ключевые слова: метод опорных функций, краевая задача теории упругости, преобразование Фурье, тензор Грина, оператор Ламе.

В задачах, рассматривающих напряжённо-деформированное состояние строительных конструкций и их элементов, относящихся к теории упругости, впрочем, как и в других областях, например при решении интегральных уравнений, где часто аналитическое решение невозможно, требуется найти приближённое решение. Везде, где можно выразить решение задачи в виде интегрального оператора, его ядро может быть точно, либо, в крайнем случае, аналитически приближённо найдено методом опорных функций [1–8]. Метод опорных функций позволяет рассчитывать напряжения и деформации, возникающие в строительной конструкции при её нагружении. Особенностью этого метода является то, что сложность формы конструкции не усложняет решение краевой задачи теории упругости, описывающей напряженно-деформированное состояние нагружаемой конструкции. Пусть напряжённо-деформированное состояние строительной конструкции описывается первой краевой задачей статической теории упругости для изотропного материала

$$c\sigma_{ij,j}(\mathbf{x}) = F_i(\mathbf{x}); \quad \varepsilon_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\{u_{i,j}(\mathbf{x}) + u_{j,i}(\mathbf{x})\};$$
$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = \Gamma_{ijpq}\cdot\varepsilon_{pq}(\mathbf{x}); \quad u_i(\mathbf{x})|_S = u_{i0}(\mathbf{x}). \tag{1}$$

Для решения краевой задачи (1) вектор перемещений $u(x)$ представим в виде

$$u_i(\mathbf{x}) = \int_V G_{ij}(\mathbf{x}-\mathbf{y})F_i(\mathbf{y})\,d\mathbf{y} - \int_S u_{j0}(\mathbf{y}_S)(\sigma)_{ijq}(\mathbf{G}\,(\mathbf{x}-\mathbf{y}_S))n_q(\mathbf{y}_S)\,dS. \tag{2}$$

Соотношение (2) при известных вектор-функциях $u_{i0}(\mathbf{x}), F_j(\mathbf{y})$ представляет собой интегральное уравнение для поиска неизвестного $G_{ij}(\mathbf{x})$ — тензора Грина краевой задачи (1). Выберем в качестве опорных несколько векторов

$u(x)$, компоненты которых на поверхности S тела принимают нулевые значения. В этом случае уравнение (2) упростится и примет вид:

$$u_i^\lambda(\mathbf{x}) = \int_V G_{ij}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) F_j^\lambda(\mathbf{y})\, d\mathbf{y}. \tag{3}$$

Здесь индекс λ определяет номер выбранной опорной вектор-функции. Воздействуя оператором Ламе:

$$(\mathbf{L} \bullet \mathbf{u}(\{\mathbf{x})_\mathbf{i}^\lambda = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x_j}}\left[\mathbf{\Gamma_{ijkh}}\,\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\left(\frac{\partial \mathbf{u}_\mathbf{k}^\lambda(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x_h}} + \frac{\partial \mathbf{u}_\mathbf{h}^\lambda(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x_k}}\right)\right] = \mathbf{F}_\mathbf{i}^\lambda(\mathbf{x})$$

на выбранные опорные векторы перемещений, вычислим соответствующие им векторы массовых сил.

Преобразуем равенство (3) по Фурье. Согласно теореме о свёртке по конечной области, получим:

$$u_i^{*\lambda}(\mathbf{k}) = G_{ij}^*(\mathbf{k}) F_j^{*\lambda}(\mathbf{k}). \tag{4}$$

Равенство (4) позволяет найти искомый тензор Грина краевой задачи (1):

$$G_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint\limits_{R^3} e^{i\mathbf{k}\bullet\mathbf{x}} u_i^{*\lambda}(\mathbf{k}) (F_j^{*\lambda}(\mathbf{k}))^{-1}\, d\mathbf{k}. \tag{5}$$

Строительная конструкция представляла собой прямоугольную пластину со стороной 20π с круглым отверстием, смещенным относительно центра пластины. По двум выбранным опорным вектор-функциям определялся тензор Грина краевой задачи упругости. В качестве контрольного решения выбиралась вектор-функция:

$$\begin{aligned} u_x(x,y) &= x + xy^3/10^5 - y^3/10^5 + x^2/5\cdot 10^3; \\ u_y(x,y) &= xy^3/10^5. \end{aligned}$$

По контрольному решению вычислялся вектор массовых сил и краевое условие, по которым с помощью найденного Фурье-образа функции Грина строилось решение задачи. Затем контрольное решение сравнивалось с найденным по краевому условию и свободному члену. Результаты проделанного представлены на графиках:

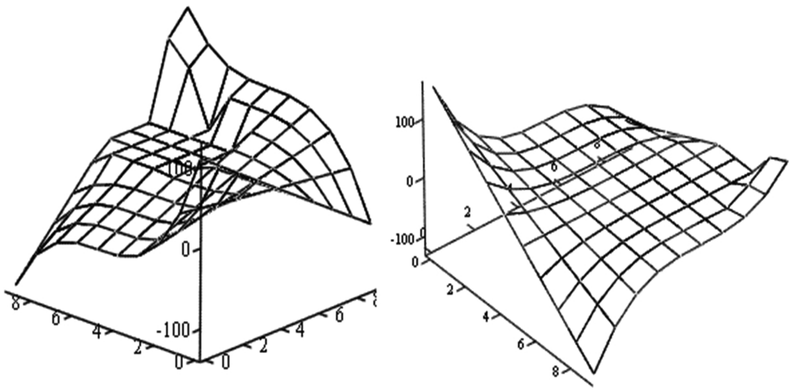

Рис. 1.

На графиках рис. 1 представлены контрольные и найденные перемещения по осям и соответственно. Видно, что контрольное решение и решение, найденное методом опорных функций совпадают.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ермоленко Г. Ю.*, *Мкртычев О. В.* Фундаментальное решение уравнения с оператором термоупругости. — Вестник Новороссийского филиала Белгородского государственного технологического университета им. В. Г. Шухова. Серия: механика и математика, 2022, т. 2, № 2(6), с. 26–28.
2. *Мкртычев О. В.* Задача Ламе о деформации трубы под действием внутреннего и внешнего давления. — Вестник Новороссийского филиала Белгородского государственного технологического университета им. В. Г. Шухова. Серия: механика и математика, 2021, т. 1, № 1(1), с. 32–36.
3. *Ермоленко Г. Ю.* Расчёт напряжённо-деформированного состояния трубы с заданными внутри трубы давлениями и на поверхности трубы перемещениями. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2024617825, 05.04.2024. Заявка от 01.04.2024.
4. *Ермоленко Г. Ю.*, *Мкртычев О. В.* Решение задач теории упругости методом опорных функций. — В кн.: Инженерно-техническое образование и наука. Сборник трудов четвертой международной научно-практической конференции. Новороссийск, 2024, с. 16–18.
5. *Горлач Б. А.*, *Ермоленко Г. Ю.* Метод опорных функций для решения задач математики и механики. — Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Физ.-матем науки», 2004, № 26, с. 122–126.
6. *Ермоленко Г. Ю.*, *Юшков С. А.* Способ решения первой начально-краевой задачи линейной теории упругости для изотропных тел. — Прикладная математика и механика, 1998, т. 62. № 4, с. 715.
7. *Ермоленко Г. Ю.* Метод опорных функций для решения задач математики и механики. — Вестник СамГТУ. Сер. Физ.-матем. науки, 2004, в. 26, с. 126–127.
8. *Ермоленко Г. Ю.* Напряженно-деформированное состояние упругих и вязкоупругих конечных тел произвольной формы при статических и динамических нагружениях. Самара: Сгау, 2001, 149 с.

Поступила в редакцию
22.IX.2024

UDC 539.3 DOI https://doi.org/10.52513/08698325_2024_31_1_1

Ermolenko G. Yu., ***Mkrtychev S. V.*** Novorossiysk, NF BSTU named after V. G. Shukhov). **Determination of the stress-strain state of building structures using the method of support functions.**

Abstract: This paper describes a method for determining the stress-strain state of building structures, a special case of solving problems in mathematics and mechanics using the method of support functions. The idea of the method is presented by the example of solving the Cauchy problem for an ODE.

Keywords: the method of support functions, boundary value problem of elasticity theory, Fourier transform, Green tensor, Lame operator.