ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 31 МАТЕМАТИКИ Выпуск 1
2024

А. Л. Якымив (Москва, МИАН). **Результаты В. Ф. Колчина в области случайных А-подстановок и некоторые дальнейшие исследования.**

УДК 512.212.2 DOI https://doi.org/10.52513/08698325_2024_31_1_1

Резюме: Пусть $T_n(A)$ есть совокупность подстановок степени n, длины циклов которых принадлежат фиксированному бесконечному множеству A (так называемых A-подстановок). Прежде всего, мы приводим результаты В. Ф. Колчина, касающиеся циклической структуры случайных подстановок $\tau_n(A)$, имеющих равномерное распределение на множестве $T_n(A)$. Далее приводятся некоторые последовавшие после его работ результаты других авторов, в том числе и для объектов, обобщающих понятие случайных A-подстановок.

Ключевые слова: Случайные A-подстановки, предельные теоремы

Пусть S_n — группа перестановок множества X из n элементов в себя. Через $Ord(\sigma)$ обозначим порядок подстановки σ из S_n, как элемента группы, т. е., минимальную степень (итерацию), в которой она равна тождественной подстановке. Предположим, что случайная подстановка (с. п.) τ_n равномерно распределена на S_n.

В работе 1967 года [1] П. Эрдеш и П. Туран доказали, что для произвольного фиксированного $x \in R$ при $n \to \infty$

$$\mathsf{P}\left\{\ln Ord(\tau_n) \leqslant \frac{\ln^2 n}{2} + x\sqrt{\frac{\ln^3 n}{3}}\right\} \to \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2}\,dy.$$

В упомянутой работе 1967 года П. Эрдеш и П. Туран пишут:[1] «Наше доказательство прямое и достаточно длинное. Однако первое доказательство бывает настолько длинным, насколько это получается. Имело бы, однако, интерес, вывести его из общих принципов теории вероятностей.»

Эта задача была решена В. Ф. Колчиным (1977) в работе [2]. Краткий обзор дальнейших исследований в этой задаче Эрдеша-Турана до 2016 года дан в заметке [3].

Пусть $T_n(A)$ — совокупность подстановок из $\mathfrak{S}_n$, длины циклов которых принадлежат заранее фиксированному множеству A (так называемые A-подстановки). Далее мы будем считать, что множество A — бесконечно. (Поэтому за пределами нашего рассмотрения оказываются решения уравнений в подстановках, см., например, книгу В. Ф. Колчина [6, глава 5]).

Предположим, что элементы множества A образуют, начиная с некоторого номера, периодическую последовательность, причем существует $r \in N$ такое, что для произвольного неотрицательного целого числа s множество $A \cap s+1, \ldots, s+r$ не может быть вложено ни в какую решетку целых чисел с шагом, большим единицы. При этом предположении Валентин Фёдорович нашёл асимптотику числа A-подстановок степени n [4] и доказал локальную предельную для числа циклов случайной подстановки, равномерно распределённой на $T_n(A)$ [5]. Кроме этого, в работе [4] и в книге

[1]Перевод автора

[6, раздел 4.4] он сформулировал три задачи, которые оказали существенное влияние на дальнейшее развитие этой области.

В частности, в работе 1989 года [4] В. Ф. Колчин высказал гипотезу о том, что аналогичные предельные теоремы справедливы и для реализаций случайного множества A, когда с. в. $\xi_i = \chi\{i \in A\}$ независимы и одинаково распределены. Эта гипотеза была доказана лишь спустя 11 лет в статье [7].

В книге [6, раздел 4.4] В. Ф. Колчин пишет: «было бы интересно рассмотреть случаи, когда плотность множества A равна 0». Эта задача была решена лишь спустя 16 лет А. Н. Тимашёвым в книге [8], см. также [9] (2016).

В той же книге [6, раздел 4.4] В. Ф. Колчин указал, что имеются несколько разрозненных результатов об асимптотике числа A-отображений, дающих одну и ту же асимптотическую формулу. Поэтому он предположил, что на самом деле справедлив некоторый более общий результат, включающий предыдущие. Эта задача тоже была решена в упомянутой монографии А. Н. Тимашёва [8].

Отметим, что, кроме сказанных, к настоящему моменту в теории случайных A-подстановок успешно были решены и ряд других задач. Например, вытекающих из основополагающей работы В. Л. Гончарова 1944 года [10]. Тем не менее, задача об аппроксимации последовательности чисел циклов случайной A-подстановки степени n с длинами, не превосходящими m при помощи соответствующей последовательности независимых пуассоновских величин в метрике полной вариации пока ещё далека от своего полного решения. Здесь получена пока лишь степенная оценка по отношению к m/n [11]. В то время как известно, что в случае $A = N$ эта скорость сверхэкспоненциальна [12]. История вопроса дана в монографии Арратиа, Барбура и Таваре [17], а также статьях Манставичюса [18, 19].

В связи со сказанным, представляет интерес изучение случайных объектов, обобщающих понятие A-подстановок. Прежде всего, отметим, что к настоящему моменту имеются по крайней мере два обобщения этого понятия на отображения n-элементного множества X в себя. Первое из них — это отображения, длины циклов которых принадлежат множеству A (так называемые A-отображения). Эти отображения были введены в работе В. Н. Сачкова [13] в 1972 году. Множество таких отображений обозначим через $F_n(A)$. Второе из них — это отображения, размеры связных компонент которых принадлежат множеству A (в связные компоненты входят не только циклические точки, но и прикреплённые к ним деревья). Такие отображения введены совсем недавно в работе А. Н. Тимашёва [14] (2019). Множество таких отображений обозначим через $G_n(A)$. Приведём два результата, касающихся отображений $F_n(A)$ и $G_n(A)$. Предположим, что множество A обладает положительной плотностью ϱ во множестве натуральных чисел. При этом предположении в [15] доказано, что

$$|F_n(A)| = n^{n-(1-\varrho)/2} L_1(n), \tag{1}$$

где последовательность $L_1(n)$ медленно меняется при $n \to \infty$. Кроме этого, в [16] показано, что

$$|G_n(A)| = n^{n-(1-\varrho)/2} L_2(n), \tag{2}$$

где последовательность $L_2(n)$ медленно меняется при $n \to \infty$ в дополнительном предположении, что для любой постоянной $1 < C < \infty$

$$|k : k \leqslant n, k \in A, m - k \in A|/n \to \varrho^2$$

равномерно по $m \in [n, Cn]$. Асимптотические формулы для последовательностей $L_1(n)$ и $L_2(n)$ даны в тех же статьях [15] и [16]. Отметим, что в общем случае соотношение (2), вообще говоря, невыполнено, поскольку при $A = aN$ и целом $a > 1$ имеем: $|G_n(A)| = 0$ при $n \in N \setminus A$. Кроме этого, из (1) и (2) не следует, каких отображений больше. Следующий пример показывает, что здесь возможны различные ситуации.

Пусть $\beta \in (0, 1)$. Положим $A_0 = 2N \cup \{1\}$, и $B = \{j : j = [i \ln^\beta i],\ i \in N\}$, а также $B_0 = 2B$, $B_1 = 2B + 1$. Рассмотрим следующие три случая.

1. $A = A_0$,
2. $A = A_0 \cup B_0$,
3. $A = A_0 \backslash B_1$.

В случае 1 отношение $|F_n(A)|/|G_n(A)|$ стремится к некоторой положительной постоянной (которая вычисляется в явном виде), в случае 2 это отношение стремится к нулю, а в случае 3 отношение $|F_n(A)|/|G_n(A)|$ стремится к бесконечности. Тем не менее, в любом случае отношение $|F_n(A)|/|G_n(A)|$ медленно меняется на бесконечности, откуда следует, что для произвольного фиксированного $\varepsilon > 0$ при достаточно больших $n \geqslant n_\varepsilon$ имеют место неравенства:

$$n^{-\varepsilon} < \frac{|F_n(A)|}{|G_n(A)|} < n^{\varepsilon}.$$

То есть, если это отношение стремится к нулю или бесконечности, то не быстрее любой степенной функции. В заключение отметим, что эта заметка ни в коем случае не претендует на полноту обзора по случайным A-подстановкам. Эти объекты оказались весьма популярными среди исследователей. При этом, вне всякого сомнения, большую роль здесь сыграли цитированные выше результаты и задачи В. Ф. Колчина. В частности, имеется 12 монографий и большое количество статей, содержащих сведения о случайных A-подстановках. К списку из 9 книг работы [20], содержащему учебник В. Н. Сачкова [21], добавим монографии Г. И. Ивченко и Ю. И. Медведева [24] и А. Н. Тимашёва [8, 23]. В качестве недавнего исследования, укажем на работу Г. И. Ивченко и Ю. И. Медведева [24]. Кроме этого, в конце статьи [16] автор привёл известные ему обобщения понятия A-подстановок. Мы здесь приведём только одно [26].

Пусть, как и ранее, S_n есть совокупность перестановок множества из n элементов. Предположим, что λ_n — произвольная фиксированная подстановка из S_n с u_i циклами длины i, $i = 1, \ldots, n$. При $B \subseteq N$ положим

$$c(n, B) = \sum_{i \in B, i \leqslant n} u_i.$$

В этой модели подстановка λ_n наблюдается с вероятностью, пропорциональной $\theta_1^{c(n,A)} \theta_2^{c(n,\overline{A})}$. Здесь $\overline{A} = N \backslash A$. Полагая в этой модели случайной подстановки $\theta_1 = \theta\chi\{i \in A\}$ с $\theta > 0$ и $\theta_2 = 1$, авторы приходят к модели случайной A-подстановки с (вообще говоря), неравномерным распределением на множестве A-подстановок степени n. Произвольные m-параметрические модели случайных подстановок рассмотрены в [25].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Erdös P, Turan P.* On some problems of a statistical grouptheory. III. — Acta math. Acad. sci. hung., 1967, v. 18, № 3–4, p. 309–320.
2. *Колчин В. Ф.* Новое доказательство асимптотической логнормальности порядка случайной подстановки. В сб.: Комбинаторный и асимптотический анализ. Красноярск, Красноярский гос. ун-т., 1977, с. 82–93.
3. *Yakymiv A. L.* Distribution of the order in some classes of random mappings. — XVII Int. Summer Conf. Probab. Stat. (ISCPS-2016) (Pomorie, Bulgaria, 25 June–1 July 2016), 2016, с. 42–50.
4. *Колчи В. Ф.* О числе циклов подстановки с ограничениями на длины циклов. — Дискретн. матем., 1989, т. 1, № 2, с. 97–109.
5. *Kolchin V. F.* The number of permutations with cycle lengths from a fixed set. In: Random Graphs, v. 2. Wiley, Chichester, 1992, p. 139–149.

6. *Колчин В. Ф.* Случайные графы. — Теория вероятн. и матем. статистика, Физматлит, М., 2000, 256 с.
7. *Якымив А. Л.* О подстановках с длинами циклов из случайного множества. — Дискретн. матем., 2000, т. 12, в. 4, с. 53–62.
8. *Тимашев А. Н.* Распределения типа степенного ряда и обобщенная схема размещения, М.: Академия, 2016, 168 с.
9. *Тимашёв А. Н.* Случайные подстановки с простыми длинами циклов. — Теория вероятн. и ее примен., 2016, т. 61, в. 2, с. 365–377.
10. *Гончаров В. Л.* Из области комбинаторики. — Изв. АН СССР, сер. матем., 1944, т. 8, с. 3–48.
11. *Якымив А. Л.* Предельное поведение порядковых статистик на длинах циклов случайных A-подстановок. — Теория вероятн. и ее примен., 2024, т. 69, в. 1, с. 148–160.
12. *Arratia R.*, *Tavaré S.* Cycle structure of random permutations. — Ann. Prob., 1992, v. 20, №3, p. 1567–1591.
13. *Сачков В. Н.* Отображения конечного множества с ограничениями на контуры и высоту. — Теория вероятн. и ее примен., 1972, т. 17, в. 4, с. 679–694.
14. *Тимашев А. Н.* Случайные отображения с объемами компонент из заданного множества. — Теория вероятн. и ее примен., 2019, т. 64, в. 3, в. 599–609.
15. *Якымив А. Л.* О числе циклических точек случайного A-отображения. — Дискретн. матем., 2013, т. 25, в. 3, с. 116–127.
16. *Якымив А. Л.* О случайных отображениях с ограничениями на размеры компонент. — Дискретн. матем., 2023, т. 35, в. 3, с. 143–163.
17. *Arratia R.*, *Barbour A. D.*, *Tavaré S.* Logarithmic combinatorial structures: a probabilistic approach, EMS Monogr. Math., Eur. Math. Soc. (EMS), Züurich, 2003, xii+363 p.
18. *Manstavićius E.* Total variation approximation and a functional limit theorem, Monatsh. Math., 2010, 161, p. 313–334.
19. *Manstavićius E.* On total variation approximations for random assemblies, AofA'12, Discrete Math. and Theoretical Computer Sci., AQ, p. 97–108.
20. *Якымив А. Л.* Предельная теорема для логарифма порядка случайного A-отображения. — Дискретн. матем., 2017, т. 29, в. 1, с. 136–155.
21. *Сачков В. Н.* Введение в комбинаторные методы дискретной математики. М.: МЦНМО, 2004.
22. *Ивченко Г. И.*, *Медведев Ю. И.* Дискретные распределения. Вероятностно-статистический справочник, М.: URSS, 2016.
23. *Тимашев А. Н.* Случайные компоненты в обобщенной схеме размещения, М.: Академия, 2017, 120 с.
24. *Ивченко Г. И.*, *Медведев Ю. И.* Случайные A-подстановки в параметрической модели. — Матем. вопросы криптографии, 2024, т. 15, в. 1, с. 35–55.
25. *Ивченко Г. И.*, *Медведев Ю. И.* Случайные подстановки: общая параметрическая модель. — Дискретн. матем., 2006, т. 18, в. 4, с. 105–112.
26. *Ивченко Г. И.*, *Соболева М. В.* Некоторые неравновероятные модели случайных подстановок. — Дискретн. матем., 2011, т. 23, в. 3, с. 23–31.

Поступила в редакцию
08.IX.2024

UDC 512.212.2 DOI https://doi.org/10.52513/08698325_2024_31_1_1

Yakymiv A. L. (Moscow, Steklov Mathematical Institute RAS) **V. F. Kolchin's results in the field of random A-permutations and some further research**

Abstract: Let $T_n(A)$ be a set of permutations of degree n whose cycle lengths belong to a fixed infinite set of A (so-called A-permutations). First of all, we present the results of V. F. Kolchin concerning the cyclic structure of random permutations $\tau_n(A)$ having a uniform distribution on the set $T_n(A)$. Some further studies are given below, including for objects generalizing the concept of random A-permutations.

Keywords: Random A-permutations, limit theorems.