ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 31 МАТЕМАТИКИ Выпуск 1
2024

Ю. И. Пастухова (Москва, ЦЭМИ РАН). **Оптимальное оценивание одного гладкого функционала от регрессии по случайным наблюдениям.**

УДК 519.22 DOI https://doi.org/10.52513/08698325_2024_31_1_1

Резюме: Показано построение асимптотически эффективной непараметрической оценки мощности сигнала по наблюдениям в случайные моменты времени при известной условной дисперсии шумов наблюдений.

Ключевые слова: асимптотически эффективное оценивание, план наблюдений, функционал от регрессии.

Пусть в моменты времени $t_1, \ldots, t_n$, единичного временного интервала $[0;1]$ доступны наблюдения $X_1(t_1), \ldots, X_n(t_n)$ сигнала $R(t)$, а именно,

$$X_i(t_i) = R(t_i) + \xi_i(t_i), \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Относительно «шумов» $\xi_i(t_i)$ предполагается, что они условно независимы при фиксированном плане наблюдений $(t_1, \ldots, t_n)$, имеют нулевое условное средние и известную условную дисперсию наблюдений, т. е.

$$E(\xi_i(t_i)|t_i) = 0, \quad E(\xi_i^2(t_i)|t_i = t) = \sigma(t), \quad \sigma(t) \in L_2, \quad 0 < \inf_{[0;\,1]} \sigma(t) < \sup_{[0,\,1]} \sigma(t) < \infty.$$

Основываясь на доказанных в [1], [2] теоремах, построим оценку мощности $F(R)$ сигнала $R(t)$, асимптотически достигающую нижних минимаксных границ среднеквадратического риска. Известно, что

$$F(R) = \int_0^1 R^{\,2}(t)\,dt.$$

Таким образом, проблема сводится к задаче оценивания нелинейного функционала $F(R)$ от функции регрессии $R(t)$ по наблюдениям $X_1(t_1), \ldots, X_n(t_n)$ в случайных точках $t_1, \ldots, t_n$, отрезка $[0,\,1]$. Для построения оценки с требуемыми свойствами предполагается, что $R \in K \subset W_2^\beta$, K некоторый выпуклый компакт, W_2^β — пространство Соболева с $\beta > \frac{1}{2}$.

Это предположение позволяет построить оценку $\widehat{R_{n_0}}$ самой функции R по первым n_0 наблюдениям такую,что

$$\sup_{R \in W_2{}^\beta} E\|\widehat{R_{n_0}} - R\|^2 \leqslant M \cdot n_0{}^{-\frac{2\beta}{2\beta+1}},$$

(M — некоторая константа).

Количество точек плана n_0 выбирается из условия $n_0 = [n^{\chi}]$ так, чтобы выполнялось неравенство
$$\frac{2\beta+1}{4\beta} < \chi < 1.$$

Оставшиеся $n_1 = n - n_0$ наблюдений тратятся на оценивание линейного функционала
$$L_{n_0} = 2\int_0^1 \widehat{R}_{n_0}(t)R(t)\,dt.$$
Оценку функционала обозначим $\widehat{L}_{n_1}$.

Относительно моментов времени $t_1, \ldots, t_n$ плана наблюдений рассматриваются два случая: план наблюдений задан и возможен выбор моментов наблюдений сигнала $R(t)$.

Задание плана наблюдений означает, что моменты $t_1, \ldots, t_n$ случайны, независимы и одинаково распределены с известной плотностью распределения $p(t)$, которая строго ограничена и положительна ($0 < c \leqslant p(t) \leqslant C < \infty$). Функционал $F(R)$ дифференцируем по Фреше на компакте K, $F'(R,t) = 2R(t)$. Ясно, что производная $F'(R,t)$ удовлетворяет в L_2 условию Липшица равномерно по $R \in K$.

Рассмотрим оценку
$$\widehat{F_n} = F(\widehat{R}_{n_0}) + \widehat{L_{n_1}} - 2\int_0^1 \widehat{R}^2_{n_0}(t)\,dt = \widehat{L_{n_1}} - \int_0^1 \widehat{R}^2_{n_0}(t)\,dt.$$

В случае заданного плана наблюдений оценку сигнала $\widehat{R_{n_0}}(t)$ можно выбрать, используя разложение сигнала $R(t)$ в ряд Фурье и оценивая его коэффициенты как в [1]. Таким образом, оказываются выполненными все условия существования оценки гладкого функционала от функции регрессии, асимптотически достигающей нижней границы среднеквадратического риска (АЭНО — асимптотически эффективная непараметрическая оценка), т. е. оценки $\widehat{F_n}$, удовлетворяющей условию
$$\lim_{n\to\infty}\sup_{R\in K}\Bigl(n\mathbf{E}\left\{\widehat{F_n} - F(R)\right\}^2 - \int_0^1 \frac{\sigma^2(t)}{p(t)}(F'(R,t))^2\,dt\Bigr) = 0.$$
В рассматриваемом случае оцениваемая мощности сигнала $R(t)$ асимптотическая эффективность оценки $\widehat{F_n}$ означает:
$$\lim_{n\to\infty}\sup_{R\in K}\Bigl(n\mathbf{E}\Bigl\{\widehat{F_n} - \int_0^1 R^2\,dt\Bigr\}^2 - 4\int_0^1 \frac{\sigma^2(t)}{p(t)}R^2(t)\,dt\Bigr) = 0.$$

В случае возможности планирования наблюдений требуется, чтобы производная $F'(R,t) = 2R$ удовлетворяла условию Гельдера по t с каким-либо показателем $\lambda \in (0,1)$ равномерно по $R \in K$.

Предположение $R \in K \subset W_2^{\beta}$ с $\beta > \frac{1}{2}$ обеспечивает выполнение этого условия. Дополнительно требуется, чтобы $\sigma \in C_{[0,\,1]}$. Оценку $\widehat{R_{n_0}}(t)$ сигнала по n_0 наблюдениям можно построить, например, с помощью эквидистантного рандомизованного плана, моменты наблюдений $t_{n_0+1}, \ldots, t_n$ выбрать условно независимыми при фиксированных $t_1, \ldots, t_{n_0}, X_1, \ldots, X_{n_0}$ с общей плотностью

$$p_0(t) = \sigma(t)|\widehat{R_{n_0}(t)}|\Big(\int_0^1 \sigma(t)|\widehat{R_{n_0}(t)}|\,dt\Big)^{-1}.$$

Тогда оценка $\widehat{F_n}$ вида (1) является асимптотически эффективной непараметрической оценкой мощности сигнала $R(t)$, удовлетворяющей условию

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{R\in K}\Big[n\mathbf{E}\Big\{\widehat{F_n} - \int_0^1 R^2\,dt\Big\}^2 - 4\Big(\int_0^1 \sigma(t)|R(t)|\,dt\Big)^2\Big] = 0.$$

Это следует из доказанной в [2] теоремы утверждающей, что в случае возможности планирования эксперимента асимптотическая эффективность гладкого функционала от регрессии означает, что

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{R\in K}\Big[n\mathbf{E}\left\{\widehat{F_n} - F(R)\right\}^2 - \Big(\int_0^1 \sigma(t)|F'(R,t)|\,dt\Big)^2\Big] = 0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пастухова Ю. И.* Непараметрическая оценка нелинейного функционала от регрессии при заданном плане. — Записки научных семинаров ЛОМИ. Л.: Наука, 1988, т. 166, с. 143–154. // *Pastuchova Ju. I.* Nonparametric estimate for a nonlinear functional of regression under a fixed plan. — Notes: of scientific seminars Leningrad Department of Steklov Institute of Mathematics of the USSR Academy of Sciences (LOMI), 1988, v. 166, p. 143–154.
2. *Pastuchova Ju. I.*, *Has'minskii R. Z.* Estimation of nonlinear functionals from the regresson function with the regressors design. — Problem of control and information theory, 1989, v. 18, №2, p. 65–77.

Поступила в редакцию
22.IX.2024

UDC 519.22 DOI https://doi.org/10.52513/08698325_2024_31_1_1

Pastuchova Ju. I. (Moscow, CEMI RAS). **Optimal estimation of one smooth functional from regression based on random observations.**

Abstract: Optimal estimation of one smooth functional from regression based on random observations the construction of an asymptotically effective nonparametric estimate of signal power based on its observations at random points in time with a known conditional variance of observational noise is shown.

Keywords: asymptotically effective estimation, observation plan, functional from the regression.