ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 31 МАТЕМАТИКИ Выпуск 2
2024

А. В. Калинкин, **К. М. Конев** (Москва, МГТУ им. Н. Э. Баумана). **Статистические оценки вероятности остановки марковского процесса рождения и гибели.**

УДК 519.21 DOI https://doi.org/10.52513/08698325_2024_31_1_**??**

Резюме: С помощью генератора случайных чисел моделируется процесс рождения и гибели.

Ключевые слова: Марковский процесс, вероятности остановки, метод Монте-Карло.

Рассматривается однородный во времени марковский процесс $\xi(t)$, $t \in [0,\infty)$, на множестве состояний $\{0,1,2,\ldots,n\}$, переходные вероятности $P_{ij}(t) = \mathbf{P}\{\xi(t) = j \mid \xi(0) = i\}$ которого при $t \to 0+$ представимы в виде, $P_{i,i-1}(t) = q_i\lambda t + o\,(t)$, $P_{ii}(t) = 1 - \lambda t + o\,(t)$, $P_{i,i+1}(t) = p_i\lambda t + o\,(t)$, Здесь $\lambda > 0$, $q_i > 0$, $p_i > 0$, $q_i + p_i = 1$, $i = 1,2,\ldots,n-1$.

Матрица $A = (a_{ij})_{i,j=0}^{n}$ инфинитезимальных характеристик $a_{ij} = dP_{ij}(t)/dt|_{t=0+}$ процесса рождения и гибели имеет вид [1]

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ q_1\lambda & -\lambda & p_1\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q_2\lambda & -\lambda & p_2\lambda & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & q_i\lambda & -\lambda & p_i\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & q_{n-2}\lambda & -\lambda & p_{n-2}\lambda & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & q_{n-1}\lambda & -\lambda & p_{n-1}\lambda \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вторая система уравнений Колмогорова в матричном виде $P_i'(t) = A^{\mathrm{T}} P_i(t)$, где $P_i(t) = (P_{i0}(t), P_{i1}(t), \ldots, P_{in}(t))$ вектор-столбец переходных вероятностей, начальное условие для линейной системы дифференциальных уравнений $(n+1)$-го порядка, $P_i(0) = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$ — единица на i-том месте.

Состояния $0, n$ являются поглощающими, т. е. $P_{00}(t) \equiv 1$, $P_{nn}(t) \equiv 1$. Рассматриваются финальные вероятности остановки $q_{i0} = \lim_{t\to\infty} P_{i0}(t)$, $p_{in} = \lim_{t\to\infty} P_{in}(t)$.

Теорема 1. *Вероятности остановки равны*

$$q_{i0} = \frac{q_1q_2\cdots q_ip_{i+1}\cdots p_{n-1} + q_1q_2\cdots q_{i+1}p_{i+2}\cdots p_{n-1} + \cdots + q_1q_2q_3\cdots q_{n-1}}{p_1p_2p_3\cdots p_{n-1} + q_1p_2p_3\cdots p_{n-1} + q_1q_2p_3\cdots p_{n-1} + \cdots + q_1q_2q_3\cdots q_{n-1}}.$$

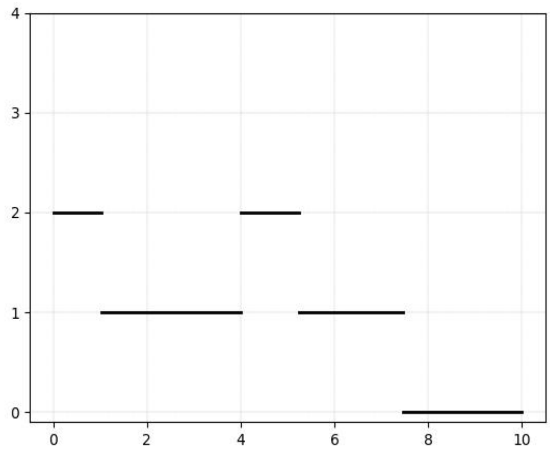
Формула получена вневероятностным анализом матрицы A [**?**].

Из соображений симметрии имеем

$$p_{in}=\frac{p_{n-1}p_{n-2}\cdots p_i q_{i-1}\cdots q_1+p_{n-1}p_{n-2}\cdots p_{i-1}q_{i-2}\cdots q_1+\ldots+p_{n-1}p_{n-2}p_{n-3}\cdots p_1}{q_{n-1}q_{n-2}q_{n-3}\cdots q_1+p_{n-1}q_{n-2}q_{n-3}\cdots q_1+p_{n-1}p_{n-2}q_{n-3}\cdots q_1+\cdots+p_{n-1}p_{n-2}p_{n-3}\cdots p_1},$$

очевидно $q_{i0}+p_{in}=1$.

Для построения реализаций марковского процесса используется его наглядное описание [1]. В состоянии i, $i=1,2,\ldots,n-1$, процесс находится случайной время τ_i с распределением вероятностей $\mathbf{P}\{\tau_i<t\}=1-e^{-\lambda t}$. Затем с вероятностью q_i совершается скачок из состояния i в состояние $i-1$ или с вероятностью p_i совершается скачок из состояния i в состояние $i+1$. Далее аналогичная эволюция. Ниже представлена типичная реализация марковского процесса $\xi(t)$.



Строится N реализаций процесса $\xi(t)$ на промежутке времени $t\in[0;T]$ и считается число N_0 реализаций, для которых $\xi(T)=0$. Принимается статистическая оценка вероятности $\widehat{q}_{i0}=N_0/N$ [**?**].

Вычисление финальных вероятностей производилось по формуле теоремы и путем статистической оценки, в случае $n=4$. Положим $\lambda=0,5$, $q_1=0,1$, $q_2=0,5$, $q_3=0,2$, начальное состояние $\xi(0)=2$. Теорема дает $q_{20}=1/9\approx 0,111$; получена оценка $\widehat{q}_{20}=0,105$ ($N=200$, $t\in[0;10]$).

Вычисления и численное моделирование при других значениях параметров n, λ, q_i, $i=1,\ldots,n-1$, различных начальных условиях, $N=100,200,500$, $t\in[0;T]$, дают близкие значения q_{i0} и оценки $\widehat{q}_{i0}$. Использован пакет Python.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гихман И. И.*, *Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов. — М.: Наука, 1977, 568 с.
2. *Калинкин А. В.*, *Ланге А. М.*, *Мастихин А. В.*, *Шапошников А. А.* Численные методы Монте-Карло для моделирования схем взаимодействий при дискретных состояниях. — Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана, Серия ”Естественные науки 2005, в. 2(17), с. 53–74.

3. *Мастихина А. А.*, *Мастихин А. В.* Об одном способе вычисления финальных вероятностей. — Рукопись, 2023, 12 с.

Поступила в редакцию
20.IX.2024

UDC 531.21 DOI https://doi.org/10.52513/08698325_2024_31_1_**??**

Kalinkin A. V., ***Konev K. M.*** (Moscow, Bauman Moscow State Technical University)**. Statistical estimates of the probability of stopping the Markov process of birth and death.**

Abstract: Using a random number generator, the process of birth and death is simulated.

Keywords: Markov process, stopping probabilities, Monte Carlo method.