ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 31 МАТЕМАТИКИ Выпуск 2
2024

А. В. Калинкин, **Д. Н. Николенко** (Москва, МГТУ им. Н. Э. Баумана). **Численные оценки финальных вероятностей марковского процесса рождения и гибели.**

УДК 519.21 DOI https://doi.org/10.52513/08698325_2024_31_1_1

Резюме: Численно сравниваются два способа вычисления финальных вероятностей процесса рождения и гибели.

Ключевые слова: Уравнения Колмогорова, метод Рунге-Кутта.

Рассматривается однородный во времени марковский процесс $\xi(t)$, $t \in [0,\infty)$, на множестве состояний $\{0,1,2,\ldots,n\}$, переходные вероятности $P_{ij}(t) = \mathbf{P}\{\xi(t) = j \mid \xi(0) = i\}$ которого при $t \to 0+$ представимы в виде $P_{i,i-1}(t) = \mu_i t + o\,(t)$, $P_{ii}(t) = 1 - (\lambda_i + \mu_i)t + o\,(t)$, $P_{i,i+1}(t) = \lambda_i t + o\,(t)$, Здесь $i = 1,2,\ldots,n-1$ $(\lambda_i > 0, \mu_i > 0)$. $P_{00}(t) \equiv 1$, $P_{nn}(t) \equiv 1$, то есть состояния $0, n$ являются поглощающими.

Процесс рождения и гибели $\xi(t)$, когда из состояния i ($i \neq 0$, $i \neq n$) случайный процесс может совершить скачок в состояние $i-1$ или состояние $i+1$, имеет ряд приложений. В частности, в теории массового обслуживания и теории надежности для представления марковского процесса используется граф состояний и переходов.

$$
\begin{tikzcd}
0 & 1 \arrow[l, "\mu_1"] \arrow[r, shift left, "\lambda_1"] & \cdots \arrow[l, shift left, "\mu_2"] \arrow[r, shift left, "\lambda_{i-2}"] & i-1 \arrow[l, shift left, "\mu_{i-1}"] \arrow[r, shift left, "\lambda_{i-1}"] & i \arrow[l, shift left, "\mu_i"] \arrow[r, shift left, "\lambda_i"] & i+1 \arrow[l, shift left, "\mu_{i+1}"] \arrow[r, shift left, "\lambda_{i+1}"] & \cdots \arrow[l, shift left, "\mu_{i+2}"] \arrow[r, shift left, "\lambda_{n-2}"] & n-1 \arrow[l, shift left, "\mu_{n-1}"] \arrow[r, "\lambda_{n-1}"] & n
\end{tikzcd}
$$

Рассматриваются финальные вероятности $q_{i0} = \lim_{t\to\infty} P_{i0}(t)$, $p_{in} = \lim_{t\to\infty} P_{in}(t)$ [2].

Теорема 1. *Финальные вероятности равны*

$$q_{i0} = \frac{\mu_1\mu_2\cdots\mu_i\lambda_{i+1}\cdots\lambda_{n-1} + \mu_1\mu_2\cdots\mu_{i+1}\lambda_{i+2}\cdots\lambda_{n-1} + \cdots + \mu_1\mu_2\mu_3\cdots\mu_{n-1}}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\cdots\lambda_{n-1} + \mu_1\lambda_2\lambda_3\cdots\lambda_{n-1} + \mu_1\mu_2\lambda_3\cdots\lambda_{n-1} + \cdots + \mu_1\mu_2\mu_3\cdots\mu_{n-1}}.$$

Формула получена А. В. Мастихиным из коммутативного решения системы для регулярных выражений некоторого инициального автомата.

Из соображений симметрии имеем

$$p_{in} = \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\cdots\lambda_i\mu_{i-1}\cdots\mu_1 + \lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\cdots\lambda_{i-1}\mu_{i-2}\cdots\mu_1 + \ldots + \lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\lambda_{n-3}\cdots\lambda_1}{\mu_{n-1}\mu_{n-2}\mu_{n-3}\cdots\mu_1 + \lambda_{n-1}\mu_{n-2}\mu_{n-3}\cdots\mu_1 + \lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\mu_{n-3}\cdots\mu_1 + \ldots + \lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\lambda_{n-3}\cdots\lambda_1},$$

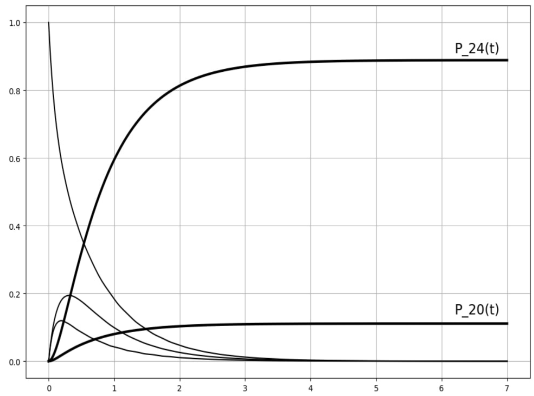
очевидно $q_{i0} + p_{in} = 1$.

Вторая (прямая) система дифференциальных уравнений Колмогорова для переходных вероятностей получает вид [1]

$$
\begin{cases}
P'_{i0}(t) = \mu_1 P_{i1}(t), \\
P'_{i1}(t) = -(\lambda_1 + \mu_1) P_{i1}(t) + \mu_2 P_{i2}(t), \\
P'_{i2}(t) = \lambda_1 P_{i1}(t) - (\lambda_2 + \mu_2) P_{i2}(t) + \mu_3 P_{i3}(t), \\
\quad \ldots \\
P'_{ij}(t) = \lambda_{j-1} P_{i,j-1}(t) - (\lambda_j + \mu_j) P_{ij}(t) + \mu_{j+1} P_{i,j+1}(t), \\
\quad \ldots \\
P'_{i,n-2}(t) = \lambda_{n-3} P_{i,n-3}(t) - (\lambda_{n-2} + \mu_{n-2}) P_{i,n-2}(t) + \mu_{n-1} P_{i,n-1}(t), \\
P'_{i,n-1}(t) = \lambda_{n-2} P_{i,n-2}(t) - (\lambda_{n-1} + \mu_{n-1}) P_{i,n-1}(t), \\
P'_{in}(t) = \lambda_{n-1} P_{i,n-1}(t),
\end{cases}
\tag{1}
$$

начальные условия $P_{ii}(0) = 1$, $P_{ij}(0) = 0$ при $j \neq i$. Линейная система $(n+1)$-го порядка с постоянными коэффициентами (1) приближенно решается методом Рунге-Кутта.

Вычисление финальных вероятностей остановки по формуле теоремы и методом Рунге-Кутта выполнены в случае $n = 4$. Положим $\lambda_1 = 9, \mu_1 = 1$, $\lambda_2 = 2, \mu_2 = 2$, $\lambda_3 = 4, \mu_3 = 1$. Пусть начальное состояние $\xi(0) = 2$. Теорема дает $q_{20} = 1/9 \approx 0,1111$; приближеное решение системы (1), при $t = 7$, дает $q_{20} \approx P_{20}(7) \approx 0,1111$. Ниже представлены графики переходных вероятностей $P_{2j}(t)$, $j = 0, 1, 2, 3, 4$, $t \in [0; 7]$.



Подстановка других значений параметров n, λ_i, μ_i $i = 1, \ldots, n-1$, $t = 7, 15, 30$, и различных начальных условий, дает близкие значения вероятностей q_{i0}, — при вычислениях двумя способами. Использован пакет Python.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гихман И. И.*, *Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов. — М.: Наука, 1977, 568 с.
2. *Мастихин А. В.* Финальные вероятности марковского процесса эпидемии Беккера. — Теория вероятн. и ее примен., 2011, т. 56, в. 3, с. 606–612.

Поступила в редакцию
20.IX.2024

UDC 531.21 DOI https://doi.org/10.52513/08698325_2024_31_1_1

Kalinkin A. V., Nikolenko D. N. (Moscow, Bauman Moscow State Technical University). **Numerical estimates of the final probabilities of the Markov process of birth and death.**

Abstract: Two methods of calculating the final probabilities of the birth and death process are numerically compared.

Keywords: Kolmogorov equations, Runge-Kutta method.