ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 31 МАТЕМАТИКИ Выпуск 1
2024

И. И. Нараленкова (Москва, СУНЦ МГУ им. М. В. Ломоносова, МГТУ им. Н. Э. Баумана)). **Методические аспекты изложения темы «Основная теорема алгебры» на лекции по аналитической геометрии.**

УДК 531.091 DOI https://doi.org/10.52513/08698325_2024_31_1_1

Резюме: Описана методика представления студентам Московского государственного технического университета имени Н. Э. Баумана Основной теоремы алгебры и основ теории многочленов при введении комплексных чисел. Внимание к данной теме и необходимость разработки методических материалов обусловлена когнитивными проблемами, возникающими у студентов, в частности, при разложении рациональной функции в сумму простейших дробей.

Ключевые слова: комплексные числа, основная теорема алгебры, разложение многочлена на множители.

В МГТУ им. Н. Э. Баумана, как или во многих других вузах Российской Федерации, на первом курсе в 1-м семестре изучают такие предметы, как аналитическая геометрия и математический анализ. Интегралы начинают изучать, как правило, во втором семестре первого курса в рамках математического анализа. Один из основных методов при вычислении интегралов от рациональных дробей — разложение интеграла на простейшие дроби. На следующих курсах появляются различные дисциплины (вычислительная математика, вычислительная механика, численные методы и др.), в которых изучают интерполяционные многочлены. В силу этого возникает необходимость еще в первом семестре познакомить студентов с основами теории многочленов. В настоящей статье показано, как перейти от изложения темы «Комплексные числа» к теме «Многочлены» и в каком объем дать материал.

Комплексные числа определяются и вводятся в различных формах: алгебраической, тригонометрической. При введении алгебраической формы комплексного числа можно обратить внимание студентов на то, что квадратное уравнение $z^2 + pz + q = 0$ с действительными коэффициентами p и q всегда имеет два (различных или одинаковых) корня, которые находятся по формулам:

а) если $D = p^2 - 4q \geqslant 0$, то

$$z_1 = \frac{-p + \sqrt{D}}{2}, \quad z_2 = \frac{-p - \sqrt{D}}{2}; \tag{1}$$

б) если $D = p^2 - 4q < 0$, то

$$z_1 = \frac{-p + i\sqrt{|D|}}{2}, \quad z_2 = \frac{-p - i\sqrt{|D|}}{2}. \tag{2}$$

Квадратное уравнение $z^2 + az + b = 0$ с комплексные коэффициентами (a и b — комплексные числа) также имеет два корня, которые находятся по формулам:

$$z_1 = \frac{-\alpha + \omega_1}{2}, \quad z_2 = \frac{-\alpha + \omega_2}{2},$$

где ω_1, ω_2 — числа, удовлетворяющие условию $\omega^2 = D = a^2 - 4b$.

Пример 1. Решите на множестве комплексных чисел уравнение

$$z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0.$$

Решение. Так как число $z_0 = 1$ не является корнем данного уравнения, то при $z \neq 1$ данное уравнение равносильно уравнению

$$(z-1)(z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = 0,$$

т.е. уравнению

$$z^6 = 1.$$

Все корни данного уравнения получаются из формулы извлечения корня из комплексного числа

$$z_k = \cos\left(0 + \frac{2\pi k}{6}\right) + i \sin\left(0 + \frac{2\pi k}{6}\right), \quad \text{где} \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Таким образом, решением исходного уравнения являются числа z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5.

Фундаментальное значение комплексных чисел для алгебры определяется в первую очередь тем, что любое алгебраическое уравнение n–й степени

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0 = 0 \qquad (a_n \neq 0)$$

с вещественными или комплексными коэффициентами имеет ровно n корней (среди которых могут быть равные). При этом

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0 = a_n (x - x_1)^{k_1} (x - x_2)^{k_2} \cdots (x - x_m)^{k_m},$$

где $z_1, z_2, \ldots, z_m$ — некоторые различные комплексные числа, а $k_1, k_2, \ldots$, k_m — натуральные числа, причем $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$.

Теорема 1. **(Основная теорема алгебры).** *Всякая целая рациональная функция $f(x)$ имеет по крайней мере один корень, действительный или комплексный.*

Теорема 2. *Всякий многочлен n–й степени разлагается на n линейных множителей вида $x - a$ и множитель, равный коэффициенту при x^n.*

Теорема 3. *Если многочлен $f(x)$ с действительными коэффициентами имеет комплексный корень $a + bi$, то он имеет и сопряженный корень $a - bi$.*

Следовательно, многочлен с действительными коэффициентами разлагается на множители с действительными коэффициентами первой и второй степени соответствующей кратности, т.е.

$$f(x) = a_n (x - x_1)^{k_1} (x - x_2)^{k_2} \cdots (x - x_r)^{k_r} (x^2 + p_1 x + q_1)^{l_1} \cdots (x^2 + p_s x + q_s)^{l_s}.$$

При этом

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_r + 2l_1 + \cdots + 2l_s = n.$$

Теорема 4. *Всякая рациональная дробь представляемая, притом единственным образом, в виде суммы многочлена и правильной дроби.*

Основная теорема. Всякая правильная рациональная дробь разлагается в сумму простейших дробей.

Пример 2. Вычислить интеграл

$$\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\,dx.$$

Решение. Преобразуем выражение, стоящее под знаком интеграла. Сначала выделим целую часть

$$\frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x} = 1 + \frac{5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x},$$

а затем разложив знаменатель правильной дроби на множители, получим

$$\frac{5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x} = \frac{5x^2-6x+1}{x(x-2)(x-3)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x-3}.$$

Приводя дробь в правой части к общему знаменателю и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем $a = \frac{1}{6}$, $b = -\frac{9}{2}$, $c = \frac{28}{3}$.

Таким образом

$$\frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x} = 1 + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x} - \frac{9}{2}\cdot\frac{1}{x-2} + \frac{28}{3}\cdot\frac{1}{x-3}.$$

Окончательно получаем

$$\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\,dx = x + \frac{1}{6}\cdot\ln|x| - \frac{9}{2}\cdot\ln|x-2| + \frac{28}{3}\cdot\ln|x-3|.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вавилов В. В. и др.* Задачи по математике. Алгебра. М.: Физматгиз, 2007, 456 с. // *Vavilov V. V. et al.* Problems in mathematics. Algebra. M.: Fismatgiz, 2007, 456 p.
2. *Пискунов Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. М.: Физматгиз, 1963, 856 с. // *Piskunov N. C.* Differential and integral calculus for vtuz. M.: Fismatgiz, 1963, 856 p.
3. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1975, 432 с. // *Kourosh A. G.* Higher algebra course. M.: Science, 1975, 432p.

Поступила в редакцию
01.XI.2024

UDC 531.091 DOI https://doi.org/10.52513/08698325_2024_31_1_1

Naralenkova I. I. (Moscow, AESC MSU, Bauman University)**. Methodological aspects of presenting the topic "The Fundamental Theorem of Algebra" in a lecture on analytical geometry.**

Abstract: The article convers some aspects of methodology of presenting the Fundamental Theorem of Algebra and the basics of polynomial theory wen introducing complex numbers to students of The Bauman Moscow State Technical University. The author considers this topic crucial and the need to develop methodological materials vital due to the challenges students encounter, in particular, when decomposing a rational function into a sum of simple fractions: students require a more detailed justification of this method and more detailed explanations.

Keywords: complex numbers, fundamental theorem of algebra, factorization of a polynomial.