

ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 20 МАТЕМАТИКИ Выпуск 3.1
2013

Секция «Прикладная вероятность и статистика»

БЕЛЯВСКИЙ Г. И., ДАНИЛОВА Н. В.

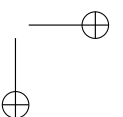
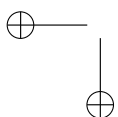
ПРОЦЕССЫ ЛЕВИ
КРАТКИЙ КУРС¹⁾

Содержание

Введение	195
Глава 1. Процессы Леви. Определение, классические примеры и безграничная делимость	198
Глава 2. Другие примеры процессов Леви	201
Глава 3. Субординированные процессы Леви.	206
Глава 4. Мартингалы и процессы Леви	208
Глава 5. Пуассоновская мера.	214
Глава 6. Интеграл Ито. Процесс Ито	220
§ 6.1. Определения и формула Ито	220
§ 6.2. Теорема о представлении мартингала.	224
§ 6.3. Экспоненциальные мартингалы.	225
§ 6.4. Замена меры и процесс плотности	225
Глава 7. Интеграл по процессу Леви.	228
§ 7.1. Интеграл Леви–Винера.	229
§ 7.2. Процесс Орнштейна–Уленбека	230
Глава 8. Процесс Ито–Леви. Формула Ито–Леви. Экспоненциальный процесс Леви.	231
§ 8.1. Стохастическая экспонента Леви	232
§ 8.2. Экспоненциальный процесс Леви и преобразование Эшера.	233
Глава 9. Процессы Леви как марковские процессы	235
§ 9.1. Модель Мертона	237
Глава 10. Конструкция процессов Леви	239
§ 10.1. Случай конечной меры Леви	239
§ 10.2. Случай бесконечной меры Леви.	239
§ 10.3. Примеры субординированных гауссовских процессов	242
Глава 11. Дискретизация процессов Леви	245
§ 11.1. Дискретизация по времени	245
§ 11.2. Дискретизация по состояниям	246

© Редакция журнала «ОПиПМ», 2013 г.

¹⁾ От Редакции. Эта публикация — журнальная редакция одноименной монографии, издание которой в форме отдельной книги будет осуществлено позднее.



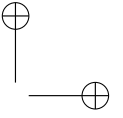
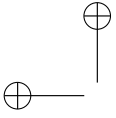
Глава 12. Моделирование процессов Леви	247
§ 12.1. Моделирование составного процесса Пуассона.	247
§ 12.2. Процесс с нормально распределенными скачками	249
§ 12.3. Модель Коу	249
§ 12.4. Генерация субординированных гауссовских процессов.	252
§ 12.5. Приближение процесса Леви составным процессом Пуассона.	254
§ 12.6. Приближение процесса Леви процессом jump-diffusion	255
§ 12.7. Представление процесса Леви рядом	256
Глава 13. Модели Леви с изменяющимися параметрами	259
§ 13.1. Аппроксимации в модели Бэйтса	260
§ 13.2. Одна из моделей (B, S) -рынка	262
Глава 14. Процессы с независимыми приращениями.	264
§ 14.1. Аддитивные процессы	264
§ 14.2. Аддитивный процесс как марковский процесс.	267
§ 14.3. Аддитивная модель (B, S) -рынка.	267
§ 14.4. Негауссовский процесс Орнштейна–Уленбека	269
§ 14.5. Характеристическая функция и характеристики процесса Орнштейна–Уленбека	270
§ 14.6. Стационарные в широком смысле последовательности и аддитивные процессы	271
§ 14.7. Линейный фильтр	273
§ 14.8. Фрактальные последовательности	277
Глава 15. Вычисления в моделях под управлением процессов Леви.	279
§ 15.1. Метод Фурье	279
§ 15.2. Метод деревьев	282
§ 15.3. Интегро-дифференциальное уравнение	283
§ 15.4. Метод Монте-Карло	285
Заключение	288
Список литературы	288

Введение

Интерес к процессам Леви обусловлен, прежде всего, тем, что процессы Леви являются одновременно семимартингалами и однородными марковскими процессами, для которых анализ, с одной стороны, оказывается проще, а с другой стороны, имеет достаточную степень общности. Процессы Леви можно рассматривать как непрерывный аналог случайного блуждания; они доставляют примеры процессов с траекториями, непрерывными справа и имеющими пределы слева. Разрывы траекторий происходят в случайные моменты времени числом не более, чем счетным на любом конечном временном интервале. Важным обстоятельством является то, что в конструкциях процессов применяются распределения с тяжелыми хвостами. К процессам Леви относятся такие важные классы процессов, как броуновское движение, пуассоновский процесс, устойчивые процессы и субординаторы.

Несмотря на то, что основные результаты теории были получены в 30-х годах прошлого столетия, интерес к процессам Леви не ослабевает в связи с их многочисленными приложениями в таких различных областях, как, например, стохастическая финансовая математика и квантовая теория поля. Следует также отметить, что исследователи постоянно получают новые теоретические и прикладные результаты в области моделирования с использованием процессов Леви. Наиболее полное изложение теории процессов Леви представлено в относительно недавних работах J. Bertoin [1], K. I. Sato [2], в «библии» по устойчивым процессам G. Samorodnitsky, M. S. Taqqu [3]. Аналитические свойства процессов Леви изложены в работах N. Jacob [4, 5], разнообразные приложения процессов Леви можно найти в сборнике под редакцией O. E. Barndorff-Nielsen, T. Mikosch, S. Resnick [6] и работах R. Cont, P. Tankov, B. Øksendal, A. Sulem [7, 8]. Приложениям процессов Леви в финансовой математике посвящены также работы отечественных математиков С. Боярченко, С. Левендорского [9] и О. Кудрявцева [10].

Поведение стохастической системы описывается стохастическим дифференциальным уравнением $dX_t = U(t, X_t) dt + V(t, X_t) dN_t$. Большинство работ посвящено исследованию решений этого уравнения (стохастическому исчислению), когда N является броуновским движением или, в более общем случае, непрерывным семимартингалом, см., например, работы I. Karatzas, S. Shreve [11], M. Revuz, D. Yor [12], H. Kunita [13]. Систематическое изложение стохастического исчисления для общих семимартингалов можно найти в работах J. Jacod, A. N. Shiryaev [14], P. Medvegyev [15], P. Protter [16]. На протяжении всей книги в дифференциальном уравнении будут использоваться и сами процессы Леви, и процессы, которые получаются из процессов Леви.



Это позволяет упростить изложение стохастического интегрирования по сравнению с теорией интегрирования по общим семимартингалам. Несмотря на большое количество монографий, посвященных процессам Леви, на русском языке такая литература практически отсутствует. Кроме этого, книга предназначена для первого ознакомления с процессами Леви, поэтому наиболее громоздкие доказательства теорем в ней опущены и приведены ссылки на книги, в которых соответствующие доказательства изложены.

Структура данной книги такова. В первой главе дается определение процесса Леви, приведены основные примеры: винеровский процесс, процесс Пуассона и составной процесс Пуассона. Устанавливается связь процесса Леви и безгранично делимого закона распределения, показывается, что процесс Леви в любой момент времени можно рассматривать как случайное блуждание.

Во второй главе рассматриваются различные классы процессов Леви: гауссовские процессы; процессы с конечной мерой Леви, являющиеся суммой гауссовского процесса и составного процесса Пуассона; процесс, мера Леви которого является взвешенной суммой мер Дирака; устойчивые процессы и субординаторы Леви, в частности, рассматривается субординатор Thorin, подробный анализ которого приведен в работе [19].

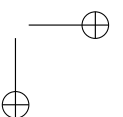
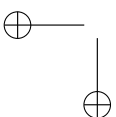
В третьей главе рассматриваются субординированные процессы Леви. Основное внимание уделяется субординированным гауссовским процессам; показано, как при помощи субординации винеровского процесса α -устойчивым субординатором можно получить 2α -устойчивый процесс Леви.

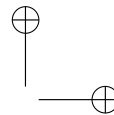
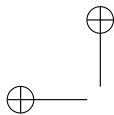
В четвертой главе приводятся основные необходимые для дальнейшего изложения сведения из теории мартингалов: теорема об остановке, разложение Дуба–Мейера и строго марковское свойство процессов Леви.

Основное содержание пятой главы посвящено разложению Леви–Ито, которое позволяет представить процесс Леви в виде суммы гауссовского процесса Леви, процесса Леви, который является квадратично интегрируемым мартингалом, и составного процесса Пуассона — процесса с ограниченной вариацией. Это разложение затем используется при определении стохастического интеграла по процессу Леви.

В шестой главе дается определение интеграла по винеровскому процессу, предваряющее определение интеграла по процессу Леви. Рассматриваются: процессы Ито и формула Ито; условие Новикова и теорема Гирсанова; изучается представление квадратично интегрируемых мартингалов. В качестве примера выводится формула Блэка–Шоулса, играющая важную роль в финансовой математике.

Интегралу по процессу Леви посвящена седьмая глава. При определении интеграла используются свойства процесса Леви, что позволяет существенно упростить изложение. Приведены примеры процессов, которые получаются в результате интегрирования по процессу Леви, в частности, негауссовский процесс Орнштейна–Уленбека.





В восьмой главе рассматриваются процессы Ито–Леви, формула Ито для процессов Леви, экспоненциальные процессы Леви, преобразование Эшера и приложения экспоненциальных процессов Леви в финансовой математике.

В девятой главе изучаются марковские процессы, дается определение оператора трансляции и инфинитезимального оператора, показывается, что и тот, и другой являются псевдодифференциальными операторами. Выводится общее уравнение для процесса справедливых цен, приводится уравнение для модели Мертона.

В десятой главе приводятся два способа построения процессов Леви. Один из них определяется как конкатенация броуновских мостов и предназначен для построения процессов с конечной мерой Леви. Показано, как при помощи этой конструкции могут быть построены приближенные версии более общих процессов Леви. Другой способ связан с субординацией гауссовского процесса. Устанавливается связь между умеренно устойчивыми процессами и субординированными гауссовскими процессами. Приводится конструкция процесса, у которого «маленькие» скачки имеют устойчивое распределение, а «большие» — экспоненциальное распределение.

В одиннадцатой главе обсуждается дискретизация процесса Леви по временной и фазовой переменным. Основная цель раздела заключается в определении приближенной версии процесса, полученной при помощи нормального, пуассоновского и бинарного распределений.

Генераторам траекторий процесса Леви с конечной и бесконечной мерой Леви посвящена двенадцатая глава. Для процесса Леви с бесконечной мерой рассматривается аппроксимация процессом с конечной мерой, субординация и представление процесса Леви посредством ряда.

В тринадцатой главе рассматриваются две модели под управлением процесса Леви. В этих моделях параметры изменяются в случайные моменты времени. В первой модели параметры управляются марковской цепью, не зависящей от процесса, во второй модели параметры изменяются в моменты остановки, зависящие от процесса. Приводятся примеры из стохастической финансовой математики.

Аддитивным процессам посвящена четырнадцатая глава, в которой рассматриваются негауссовский процесс Орнштейна–Уленбека и популярная модель Васичека под управлением процесса Леви. Кроме того, при помощи аддитивных процессов проводится построение стационарных в широком смысле последовательностей и последовательностей со стационарными в широком смысле приращениями, в том числе фрактальных последовательностей.

В последней главе рассматриваются вычислительные схемы: метод Фурье, метод деревьев и метод Монте-Карло.

