ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 2 МАТЕМАТИКИ Выпуск 1
1995

ШОР Н. З.

ЗАДАЧИ МИНИМИЗАЦИИ МАТРИЧНЫХ ФУНКЦИЙ И НЕДИФФЕРЕНЦИРУЕМАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ

§ 1. Введение

Пусть $P_{m,n}$ — класс вещественных прямоугольных матриц размерности $m \times n$. Элементы матрицы $A \in P_{m,n}$ будем обозначать a_{ij}, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$. Рассмотрим k-мерный вектор параметров $u = \{u_1, \ldots, u_k\}$, семейство функций $a_{ij}(u)$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, и семейство матричных функций $\Phi_0(A), \Phi_1(A), \ldots, \Phi_r(A)$, зависящих от вектора элементов $\{a_{ik}\}$ матрицы A. Пусть $A(u) = \big\{a_{ij}(u)\big\}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.

О п р е д е л е н и е. Под задачей оптимизации (минимизации) матричных функций будем понимать следующее: найти

$$\inf_{u \in U} \Phi_0(A(u)), \qquad U \subseteq \mathbf{R}^k, \quad A \in P_{m,n}, \tag{1}$$

при ограничениях

$$\Phi_\rho(A(u)) \leqslant 0, \qquad \rho = 1, \ldots, r. \tag{2}$$

Формально этот класс задач весьма широк, ведь в форме матрицы можно представить любой вектор, так что к виду (1)–(2) можно свести произвольную конечномерную задачу математического программирования. В более узком смысле мы будем понимать под задачей минимизации матричных функций (или матричной оптимизации) такие задачи, которые *удобно* формулировать в терминах матричного исчисления (оптимизация определителей, спектров (собственных чисел), областей локализации корней характеристических уравнений при ограничениях, которые легко формулируются как условия принадлежности определенному классу матриц и т. п.). Такие задачи в большом числе возникают в математической статистике, планировании экспериментов, теории кодирования, экстремальных задачах на графах и в комбинаторике, при качественном анализе решений, в вопросах устойчивости, идентификации параметров систем, описываемых дифференциальными уравнениями, а также в задачах выбора оптимального управления и локализации фазовых состояний динамических систем.

Уже этот неполный перечень показывает важность разработки достаточно общих методов матричной оптимизации. С этой тематикой непосредственно связаны матричные неравенства, по которым имеется обширная литература (см. монографии [5], [55]).

Многие важные характеристики матриц (например, собственные числа симметричных квадратных матриц) представляют собой негладкие функции от элементов матриц. Как следствие этого обстоятельства, задачи матричной оптимизации зачастую оказываются негладкими. В последнее время количество публикаций по матричной оптимизации растет очень быстро. Изучается структура субдифференциалов матричных функций, необходимые и достаточные условия экстремума, вопросы двойственности, при этом интенсивно используются современные методы нелинейного и выпуклого анализа.

В то же время алгоритмические и вычислительные аспекты, за редкими исключениями, разработаны гораздо слабее. При этом проявляется определенная тенденция, связанная с «недоверием» к эффективности, и, в определенной мере, с недооценкой методов негладкой оптимизации. Например, предлагаются гибридные процедуры, заключающиеся в разработке алгоритмов, которые учитывают тонкую структуру субдифференциала в точке минимума и обладают асимптотически высокой скоростью сходимости (сверхлинейной или даже квадратичной). Однако хорошие качества этого, как правило, достаточно сложного алгоритма фактически начинают проявляться лишь в небольшой окрестности минимума, в которой субградиент «хорошо» аппроксимируется элементами субдифференциала G^* в точке минимума [12], [36]. Для попадания же в эту окрестность рекомендуют использовать произвольные методы негладкой оптимизации, в том числе практически и не очень быстрые, например, субградиентный метод или метод эллипсоидов.

Мы исповедуем несколько иной подход. В настоящее время разработан ряд практически эффективных методов негладкой оптимизации, обладающих для выпуклых задач достаточно высокой скоростью сходимости по функционалу и не только в асимптотическом (локальном) смысле, но и в глобальном смысле. Примером могут служить методы субградиентного типа с растяжением пространства в направлении разности последовательных субградиентов (r-алгоритмы). В последнее время отработаны модификации этих алгоритмов, в которых удается с помощью сравнительно несложных вычислений уточнять в процессе счета нижнюю оценку минимума, контролировать точность по функционалу. Эти средства позволяют практически эффективно решать с высокой точностью различные выпуклые задачи матричной оптимизации, не прибегая к «гибридизации» со специфическими алгоритмами, сходящимися хорошо лишь локально. Для того чтобы пояснить основные идеи, рассмотрим весьма интересный класс задач, имеющий многочисленные приложения, а именно, класс задач максимизации суммы k наибольших собственных чисел симметричной $(n \times n)$-матрицы, элементы которой аффинным образом зависят от параметров. При изложении постановки и свойств этой задачи существенно используются работы [8], [36], [38], [39], [40]. Сокращенно указанный класс задач будем называть $MS(n, k)$-задачами.

Другой, более распространенный, класс матричных задач с ограничениями на неотрицательную определенность будет рассмотрен в § 3.