

ДЖАМШИДАЙН Ф.

**ХЕДЖИРОВАНИЕ КВАНТО,
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СВОПОВ И ОТНОШЕНИЙ**

В данной статье на основе общих аргументов отсутствия арбитража на международных рынках оцениваются и реструктуризуются в замкнутом виде дифференциальные свопы и разнообразные кванто опционы и фьючерсы. Это сделано на фундаменте основных закономерностей при помощи явного формирования хеджирующих портфелей в предположении, что мгновенные ковариации детерминированны.

Ключевые слова: международные стратегии заключения сделок, межрыночное хеджирование, расчет цены, репликация, правила умножения и деления, детерминированные ковариации.

1. Введение

Последние годы свидетельствуют о значительном росте объема и диапазона как котирующихся на бирже производных, так и внебиржевых продуктов, к которым относятся многочисленные активы и валюты. Растущая интернационализация рынков дала начало «кванто», или контрактам с гарантированным обменным курсом. Такие контракты дают инвесторам возможность участвовать в иностранных активах и индексах, не подвергаясь риску обменного курса. (Существенно, что доход или потери, имеющие место по завершении контракта, конвертируются в отечественную валюту по обменному курсу, согласованному в начале контракта.) Существуют простые кванто-фьючерсы и опционы кванто, а иногда черты кванто добавляются к экзотическим опционам или к таким инструментам фиксированного дохода, как обязательства, связанные с простыми акциями. Другой пример кванто-продукта фиксированного дохода — дифференциальный своп (или «диф.своп»). Он позволяет инвестору оценивать плавающие процентные ставки другой страны, не подвергаясь риску обменного курса. Обобщают это понятие

Jamshidian F. Hedging quantos, differential swaps and ratios. — Applied Mathematical Finance, 1994, vol. 1, p. 1–20. Publisher: Chapman & Hall.

© Chapman & Hall, 1994 г.

© Перевод на русский язык с разрешения владельца прав. Научное издательство «ТВП», 1995 г.

«диф. свопционы» (дающие право ввести или завершить диф. своп).

Контракты кванто могут не быть напрямую чувствительными к уровню обменного курса, но их оценка и хеджирование существенным образом зависят от корреляции (или ковариации) обменного курса с соответствующими индексами или процентными ставками. Другая категория чувствительных к корреляции ценных бумаг — экзотические опционы, такие, как опцион на лучший из нескольких активов, двойной опцион (спред), пропорциональный опцион. Если поддерживается нейтральная позиция относительно общего направления рынка, то такие опционы дают возможность оценить относительную эффективность двух (или более) похожих активов и в этом качестве представляют интерес для арбитражеров и хедж-фондов. Корреляция также могла бы войти в уравнение в контексте единых активов и единой валюты. Например, фьючерсные опционы и связь между форвардными и фьючерсными контрактами обуславливаются корреляцией между процентными ставками и лежащими в основе активами.

Данная статья предоставляет рекомендации по хеджированию и формулы расчета цены для многообразия чувствительных к корреляции ценных бумаг в предположении что цены непрерывны, а соответствующие ковариации детерминированны.¹⁾ Среди рассматриваемых продуктов — диф. свопы, фьючерсы кванто, опционы по фьючерсам (кванто), соглашения по форвардным ставкам и такие опционы на отношения, как оцениваемый в долларах Европейский опцион для отношения индекса акций DAX (Германия) к индексу акций CAC (Франция).²⁾ Очевидно, что хеджирование этих ценных бумаг требует динамического заключения сделок на международных рынках с фондами, постоянно конвертируемыми из одной валюты в другую посредством операций по обменному курсу спот или форвардному обменному курсу. Используя предположение о детерминированности мгновенных ковариаций, заимствованное у Мертона [14], мы строим явные динамически уравниваемые стратегии заключения сделок, которые реплицируют*) эти контракты и, в качестве побочного результата, предоставляют для них простые общие формулы расчета цены.

¹⁾Некоторые из результатов данной статьи появлялись ранее в работах Джамшидайна [12] и [13].

²⁾Различные варианты и применение опционов кванто обсуждаются у Рейнера [15]. См. также [11], [13]. Диф. свопы были также рассмотрены Джамшидайном [12], Баббсом [1], Турнбулом [16] и Эспозито [7]. В сравнении с данной статьей и работой Джамшидайна [12], последние три статьи разрабатывают традиционную методологию эквивалентной мартингальной меры, обращаются к особым случаям, и их окончательные формулы довольно сложны.

*)Данный термин оставлен без перевода, поскольку очень близкий ему по значению термин «реструктуризует» в дальнейшем изложении не всегда вполне точно отражает смысл первого. — *Прим. ред.*

Определенные аспекты методологии данной статьи отличают ее от традиционных подходов. Мы, прежде всего, интересуемся хеджированием, т.е. реструктуризацией ценных бумаг — расчет тогда выступает как следствие. Это осуществляется в три коротких шага. Сначала мы даем словесное описание каждого контракта и описываем его выплаты. Затем строится некоторая динамически уравниваемая стратегия заключения сделок, включающая операции на соответствующих рынках, таких, как рынки валюты, процентных ставок и индексов акций. И наконец, простым применением леммы Ито показывается, что выплаты данной стратегии идентичны выплатам исходных ценных бумаг. Это обосновывает репликацию. Заметим, что на этой стадии не делается никакого предположения об отсутствии арбитража: репликация оправдана независимо от того, существует или нет на рынке возможность для арбитража, в том числе и для ценных бумаг, участвующих в репликации. То, что представляемая стратегия действительно является репликацией, — это простой математический факт, не зависящий от каких-либо соображений арбитражности.

Как только построена защитная стратегия, немедленно, с использованием предположения о безарбитражности в виде закона одной цены, выводится стоимость исходной ценной бумаги. Закон одной цены устанавливает, что если стратегия заключения сделок реплицирует данную ценную бумагу, т.е. обе имеют идентичные выплаты, то стоимость ценной бумаги равна цене хеджирующего портфеля; в противном случае, играя на понижение против остальных, можно было бы получить прибыль из арбитражных сделок.¹⁾ Закон одной цены обычно формулируется и применяется для кассовых сделок (в противоположность форвардным и фьючерсным контрактам) в контексте единой валюты. Соответствующие обобщения будут сформулированы позднее как теоремы расчета цены и репликации форвардных и фьючерсных контрактов.

Короче говоря, методология данной статьи состоит просто из показа, при помощи леммы Ито, того, что демонстрируемая стратегия действительно реплицирует, с последующим расчетом цены с привлечением закона одной цены. В частности, в противоположность другим методам, не навязываются и не применяются никакие новые математические формулировки условия безарбитражности, не делается никаких замен меры, не записываются и не вычисляются никакие математические ожидания и не решаются никакие дифференциальные уравнения. Кроме того, вывод автономен и всего несколько строчек отделяет ис-

¹⁾Предполагается, что закон одной цены и его очевидное обобщение на две разные стратегии с одинаковыми выплатами действует на протяжении всей статьи. Данное предположение подразумевает отсутствие операционных издержек, разницы между брутто и нетто прибылью, ограничений на продажу без покрытия, кредитного риска, сборов, и что ценные бумаги бесконечно делимы, непрерывно продаваемы, что возможно регулирование и т.д.

ходные принципы от конечных результатов. Насколько нам известно, подобный подход прежде применялся только в [4, Propositions 1–10], тогда как наши выводы делаются в контексте непрерывного заключения сделок и относятся, прежде всего, к взаимодействию на международных рынках.

Наиболее распространенная математическая формулировка условия безарбитражности заключается в следующем (см., например, [8]): существует «эквивалентная мартингальная мера», относительно которой цены являются мартингалами. В случае «многофакторной модели», эквивалентная, по существу, формулировка предполагает, что существует такой (векторный) процесс $\lambda(t)$, называемый «рыночной ценой риска», что мгновенный ожидаемый доход любого денежного актива равен мгновенной процентной ставке плюс волатильность актива, умноженная на рыночную цену риска. (В обозначениях раздела 15, $\mu_X(t) = r(t) + \sigma_X(t)\lambda(t)$ для всех цен $X(t)$ денежных активов с нулевыми дивидендами.) Существуют другие математические определения безарбитражности в терминах существования определенного непрерывного линейного функционала, разделяющей гиперплоскости, агента, максимизирующего полезность, и т.д. (см., например, [5]). Но, повторяем, мы не используем здесь никакое из этих математических определений, так как все, что нам нужно, это закон одной цены, причем только для расчета цены, но не для хеджирования. Фактически, для многих продуктов, включая диф. свопы LIBOR, опцион кванто и опцион отношения, мы даже не требуем существования мгновенной процентной ставки (т.е. учета денежного рынка).

В любом случае, для рассматриваемого здесь случая интернациональных рынков обычное понятие эквивалентной мартингальной меры должно быть расширено, чтобы предотвратить возможность арбитражных сделок между рынками. Результатом является специфическая связь между мерами эквивалентных мартингалов и операторами ожидания разных стран, равносильная тому, как рыночные цены риска любых двух стран отличаются вектором изменчивости их перекрестного обменного курса. Соответствующие формулы представлены в [11]. (См. также работу Фрашо [9].) Однако, в методологии данной статьи требуется только, чтобы реплицирующая стратегия недвусмысленно определяла необходимые операции по обменному курсу.

Отдельно от данной методологии существуют вопросы, связанные с конечными результатами, которые сами по себе заслуживают внимания. Не многие из статей, посвященных производным ценным бумагам, на самом деле предоставляют явные стратегии хеджирования. Одной из причин может быть то, что результатом широко распространенной методики эквивалентной мартингальной меры являются формулы для цен (в виде математических ожиданий), а не непосредственно для хеджа. По общему признанию, когда в качестве обеспечения производных

ценных бумаг выступают денежные активы и их цена есть функция цен участвующих в сделке денежных активов той же валюты, хедж получается из цены в результате простого взятия частных производных. Но в других ситуациях это неверно. Например, даже в случае равенства форвардной и фьючерсной цен, их отношение хеджирования не равно 1. Приведем менее тривиальный пример: совсем не очевидно, как вывести продуманную стратегию хеджирования для непрерывного дифференциального свопа, описанного в разделе 6, из соответствующей формулы цены (6.2).

Дополнительная польза построения хеджа состоит в том, что это выявляет те ценные бумаги, которые имеют отношение к данной проблеме. Например, в предположении детерминированности ковариаций, только облигация с нулевым купоном будет участвовать в репликации Европейского опциона по фьючерсным контрактам. Облигации с другими условиями погашения не должны даже участвовать в сделках или реплицироваться. В частности, вопреки некоторым утверждениям, данная задача (а также дифференциальные свопы LIBOR, опционы кванто, опцион отношения и т. д.), не требуют репликации процентных ставок по срочным сделкам или континуума цен облигаций с нулевым купоном.

Выраженные в терминах цен участвующих в сделках ценных бумаг и их мгновенных ковариаций, формулы расчета цен и хеджирования кратки и экономически интуитивны. Они не зависят от выбора броуновского движения в качестве основы и сохраняют ту же общую форму, независимо от числа факторов (конечного или нет). Для специфических примеров лежащих в основе стохастических процессов (например, для гауссовской модели) можно без труда подсчитать соответствующие ковариации, как показано далее.

Вероятностные методы являются общими и используют только понятие квадратической ковариации (т.е. «мгновенной ковариации») и стохастическое интегрирование, применимое к семимартингалам. Предположение о детерминированности ковариации нужно для того, чтобы процессы были согласованными, а предположение о непрерывности позволяет применять лемму Ито.¹⁾ Основным специальным случаем является ситуация, когда цены представляют собой процессы Ито с детерминированными «векторами волатильности». Другим примером являются модели «гауссовского поля». Постоянно будут использоваться правила деления и/или умножения Ито, а именно, если $X(t)$, $Y(t)$ и $Z(t)$ — по-

¹⁾ Читателям, заинтересованным в строгости, советуем обратиться к своему любимому учебнику или трактату, где разбираются те минимальные технические условия, которые необходимы для обоснования простых преобразований данной статьи, в частности, преобразований раздела 6. Следует отметить также, что в разделах 2, 3 и 8 ковариации не предполагаются детерминированными и их результаты имеют силу в общем случае.

положительные непрерывные семимартингалы, то

$$d\left(\frac{XY}{Z}\right) = \frac{XY}{Z} \left(\frac{dX}{X} + \frac{dY}{Y} - \frac{dZ}{Z} + \text{cov}_t \left[\frac{dX}{X} - \frac{dZ}{Z}, \frac{dY}{Y} - \frac{dZ}{Z} \right] \right).$$