ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 18 МАТЕМАТИКИ Выпуск 1
2011

ЗВЕРЕВ О.В., ХАМЕТОВ В.М.

МИНИМАКСНОЕ ХЕДЖИРОВАНИЕ ОПЦИОНОВ ЕВРОПЕЙСКОГО ТИПА НА НЕПОЛНЫХ РЫНКАХ (ДИСКРЕТНОЕ ВРЕМЯ) [1)]

Содержание

Статья посвящена решению задачи расчета европейского опциона на неполном рынке с дискретным временем. Для ее решения рассматривается вспомогательная задача нахождения верхнего гарантированного значения ожидаемого риска, причем функция риска — экспоненциальная и зависит от дефицита. Верхнее гарантированное значение определяется как минимакс от ожидаемого риска, причем сначала берется верхняя грань по множеству эквивалентных вероятностных мер, а затем нижняя грань по множеству самофинансирующих портфелей. Для этой задачи находятся условия существования такого портфеля, на котором внешняя нижняя грань достигается. Опираясь на этот результат, устанавливается разложение платежного обязательства, обобщающее известное опциональное разложение. Далее получены условия существования вероятностной меры, которая доставляет верхнюю грань ожидаемому риску и оказывается мартингальной дискретной мерой. В работе показано, что эти результаты позволяют произвести «явно» расчет европейского опциона на неполном рынке. Во второй части работы приводятся примеры расчета европейского опциона на конечном и имеющем компактный носитель неполных рынках.

Ключевые слова и фразы: европейский опцион, хеджирование, минимаксный портфель, неполный рынок, опциональное разложение, S-представление, функция риска.

Введение

1. Статья посвящена теории расчета европейских опционов на неполных рынках. Основная проблема, которую приходится решать в этой

[1)] Вторая часть этой статьи, в которую вошли «§ 5. Минимаксный хеджирующий портфель европейского опциона на конечном $(1, S)$-рынке» и «§ 6. Пример», будет опубликована в следующем выпуске журнала.

теории, состоит в выборе вероятностной меры, относительно которой следует проводить расчет опциона. В работах [1–7] предложено выбирать такую мартингальную меру, относительно которой стоимость европейского опциона была бы максимальной. В них для различных моделей безарбитражных рынков был предложен метод построения портфелей и нахождения стоимости опциона, который опирается на опциональное разложение супермартингалов.

В [1] для гладкого платежного обязательства было установлено опциональное разложение в предположении, что эволюция цен рисковых активов описывается диффузионным процессом со скачками. Основываясь на этом разложении, в статье было установлено существование суперхеджирующего портфеля с потреблением, а также найдена цена опциона.

В [2–4] было доказано существование опционального разложения платежного обязательства для неполных безарбитражных рынков в предположении, что процесс, описывающий эволюцию цен рисковых активов, является семимартингалом, и обоснована (в терминах этого разложения) методика расчета опциона европейского типа.

В [5–7] для неполных безарбитражных рынков с дискретным временем для платежного обязательства было установлено существование опционального разложения, в терминах которого был обоснован метод расчета опционов.

Отметим, что в рамках этого подхода к расчету опционов возникает потребность в вычислении существенной верхней грани по множеству мартингальных мер от условного математического ожидания фунционалов, заданных на траекториях цен рисковых активов. Нахождение этой существенной верхней грани представляет собой самостоятельную математическую проблему. По этой причине в работах [1–7] отсутствуют явные формулы, позволяющие конструктивно описать портфельный процесс и процесс эволюции капитала, соответствующего этому портфелю. Известно [8–10], что задача нахождения существенной верхней грани от условного математического ожидания от некоторого аддитивного или мультипликативного целевого функционала, заданного на траекториях управляемого случайного процесса, рассматривается в теории оптимального управления случайными процессами. В этой теории данная проблема решается с помощью стохастического варианта метода динамического программирования. Попутно отметим, что именно такой подход был использован в [1].

2. Для решения задачи расчета европейского опциона на неполных рынках в данной работе (в отличие от [1–7]) применен принцип минимакса, который в данном случае можно сформулировать следующим образом: поскольку неизвестно, какое распределение вероятностей имеет последовательность цен рисковых активов, следует считать, что оно таково, что стоимость европейского опциона максимальна, при этом в

рисковые активы надо вкладывать такой минимальный капитал, который позволил бы достоверно исполнить платежное обязательство. Реализация этого принципа в работе опирается на две возможности: первая основана на сведении задачи поиска минимакса к игровой задаче оптимального стохастического управления, вторая опирается на сведение задачи расчета европейского опциона на неполных рынках к игровой задаче оптимального стохастического управления с мультипликативным целевым функционалом, которая следует из результатов работы [11].

3. Опишем кратко наш подход к решению задачи расчета европейского опциона на неполных рынках. Предполагается, что имеется многомерный рынок, состоящий из одного безрискового и нескольких рисковых активов, стоимость которых описывается многомерной случайной последовательностью $\{S_t\}_{t\in\{0,1,\dots,N\}}$. На этом рынке рассматривается опцион европейского типа с моментом исполнения $N<\infty$ и платежным обязательством f_N, которое зависит от цен $S_0,S_1,\dots,S_N$. Предполагается, что на рынке имеется два игрока и они наблюдают (в каждый момент времени) стоимость рискового актива. Первый игрок — рынок, стратегиями которого являются вероятностные меры Q на траекториях цен рисковых активов, эквивалентные некоторой базовой мере P. Второй игрок управляет активами, его стратегиями являются многомерные предсказуемые последовательности $\{\gamma_t\}_{t\in\{1,2,\dots,N\}}$, которые порождают самофинансирующие портфели. Предполагается, что функция риска (выигрыша второго игрока), зависящая от дифицита, — экспоненциальная (выбор такой функции риска будет разъяснен ниже). При этом под дифицитом, как и в [7], мы понимаем разность между платежным обязательством и доходом, полученным вторым игроком от управления портфелем активов в течении «времени жизни» опциона, т. е. $f_N-\sum_{i=1}^N(\gamma_i,\Delta S_i)$, где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в многомерном евклидовом пространстве, $\Delta S_i\overset{\Delta}{=}S_i-S_{i-1}$. Предполагается также, что игроки «разумны» и выбирают свои стратегии независимо друг от друга. При этом первый игрок максимизирует ожидаемый риск на множестве $\mathfrak{R}_N$ вероятностных мер Q, эквивалентных некоторой базовой вероятностной мере P, а второй игрок его минимизирует на множестве D_1^N допустимых количеств рисковых активов $\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_N$. В результате мы приходим к следующей минимаксной задаче:

$$\mathbf{M}^Q\exp\Big\{f_N-\sum_{i=1}^N(\gamma_i,\Delta S_i)\Big\}\to\inf_{(\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_N)\in D_1^N}\ \sup_{Q\in\mathfrak{R}_N},\qquad(1)$$

где символ $\mathbf{M}^Q$ обозначает интеграл Лебега относительно меры Q. В статье пара $(Q,\gamma_1^N)\in\mathfrak{R}_N\times D_1^N$ названа *бистратегией* и, как принято в теории игр [15], величина

$$\overline{V}_0 = \inf_{(\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_N)\in D_1^N} \sup_{Q\in\mathfrak{R}_N} \mathbf{M}^Q \exp\Big\{f_N - \sum_{i=1}^N (\gamma_i, \Delta S_i)\Big\}$$

названа *верхним гарантированным значением*, а тройка $(Q^*, \gamma_1^{*N}, \overline{V}_0)$, где Q^* — некоторая вероятносная мера и $\gamma_1^{*N} \triangleq (\gamma_1^*, \gamma_2^*, \ldots, \gamma_N^*) \in D_1^N$, такие, что

$$\overline{V}_0 = \mathbf{M}^{Q^*} \exp\Big\{f_N - \sum_{i=1}^N (\gamma_i^*, \Delta S_i)\Big\}, \tag{2}$$

названа *решением* задачи (1).

Идейной основой для рассмотрения задачи (1) послужила работа [11], в которой рассмотрена и решена задача (1) для частного случая. В ней для обоснования S-представления мартингалов [6] был применен стохастический вариант метода динамического программирования. В данной работе мы обобщаем этот результат (см. теорему 4). Попутно отметим, что выбор экспоненциальной функции риска связан именно с возможностью применения этого метода. Решение задачи (1) $(Q^*, \gamma_1^{*N}, \overline{V}_0)$ позволяет: 1) установить аналог опционального разложения для любой $\mathcal{F}_N^S \triangleq \sigma\{S_0, S_1, \ldots, S_N\}$-измеримой ограниченной функции f_N, которая является платежным обязательством в задаче расчета опциона европейского типа на неполном рынке; 2) исследовать свойства меры Q^* и осуществить однозначный выбор вероятностной меры, относительно которой следует проводить расчет опциона; 3) найти портфель активов в любой момент времени и поставить ему в соответствие капитал.

4. Изложим кратко содержание статьи. Описанию метода построения решения задачи (1) посвящен первый параграф работы. В нем сначала обосновывается возможность применения к задаче (1) стохастического варианта метода динамического программирования. Для этого вводится случайная последовательность $(\overline{V}_t, \mathcal{F}_t^S)_{t\in N_0}$,

$$\overline{V}_t \triangleq \inf_{(\gamma_{t+1},\gamma_{t+2},\ldots,\gamma_N)\in D_{t+1}^N} \operatorname*{ess\,sup}_{Q\in\mathfrak{R}_N} \mathbf{M}^Q \Big[\exp\Big\{f_N - \sum_{i=t+1}^N (\gamma_i, \Delta S_i)\Big\}\Big|\mathcal{F}_t^s\Big], \tag{3}$$

где $\mathcal{F}_t^S = \sigma\{S_0, S_1, \ldots, S_t\}$ — фильтрация, порожденная последовательностью цен, D_{t+1}^N — сужение множества D_1^N на $\{t+1, t+2, \ldots, N\}$. Затем мы доказываем, что $\overline{V}_t$ удовлетворяет рекуррентному соотношению (8) (теорема 1). Далее находятся условия существования стратегии γ_1^{*N}, на которой достигается«внешняя» существенная нижняя грань в (3) (теорема 3). Затем, опираясь на этот результат, устанавливаем справедливость опционального разложения для платежного обязательства в классе эквивалентных мер $\mathfrak{R}_N$ (теорема 4). Далее устанавливаем условие существования единственной вероятностной меры Q^*, на которой достигается «внутренняя» существенная верхняя грань в (3) (теорема 5). Из этих результатов следует, что бистратегия (Q^*, γ_1^{*N}) является минимаксной, а набор $(Q^*, \gamma_1^{*N}, \overline{V}_0)$ является решением задачи (1) (теорема 8). Доказательство этих результатов составляет содержание третьего параграфа.

Второй параграф посвящен решению задачи минимаксного хеджирования опционов европейского типа на неполных рынках. Сначала, основываясь на аналоге опционального разложения, устанавливаем связь между задачей (1) и задачей построения минимального совершенного суперхеджирующего портфеля с потреблением [6] европейского опциона на неполном рынке (теорема 10). Далее доказываем, что построенная в § 1 вероятностная мера Q^* является мартингальной (теорема 11). Отсюда и из теоремы 4 следует, что относительно меры Q^* платежное обязательство допускает S-представление ([6, теорема 12]). Кроме того, установлено, что мера Q^* является дискретной (теорема 13). Из этих утверждений следует, что исходный неполный рынок относительно меры Q^* можно отождествить с полным, а соответствующий минимальный совершенный суперхеджирующий портфель с потреблением имеет нулевое потребление, который назван в работе *минимаксным хеджирующим.* Доказательство этих утверждений составляет содержание § 4.

В пятом параграфе решается задача построения минимаксного хеджирующего портфеля европейского опциона на одномерном конечном неполном рынке в предположении, что эволюция цен рискового актива описывается конечной марковской цепью.

В § 6 приводится пример расчета минимаксного хеджа европейского опциона на одномерном неполном рынке в предположении, что доходности рискового актива — независимые одинаково распределенные случайные величины, носитель вероятностной меры которых является компактом.

Отметим, что результаты, составляющие содержание статьи, частично были анонсированы в докладе [16].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 10-01-00-767.

§ 1. Решение минимаксной задачи (1)

Этот параграф носит вспомогательный характер. В нем мы приводим условия существования решения задачи (1).

1.1. В данном разделе приводятся необходимые для изложения обозначения, опр еделения, а также содержится постановка минимаксной задачи (1).

1.1.1. Пусть на стохастическом базисе $(\Omega, F, (\mathcal{F}_t)_{t\in N_0}, P)$, где $N_0 \triangleq \{0, 1, 2, \ldots, N\}$, задана d-мерная ($d < \infty$) согласованная случайная последовательность, обозначаемая $\{S_t, \mathcal{F}_t\}_{t\in N_0}$. Положим, что: i) вероятностная мера P фиксированна, ее назовем *базовой* [6]; ii) для любого

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *El Karoui N.*, *Quenez M. C.* Dynamic programming and pricing of contingent alaims in a incomplete merbet. — SIAM J. Control Optim., 1995, v. 33, № 1, p. 29–66.
2. *Kramkov D. O.* Optional decomposition of supermartingales and hedging contingent alaims in incomplete security markets. — Probab. Theory Related Fields, 1996, v. 105, № 4, p. 459–479.
3. *Föllmer H.*, *Kramkov D.* Optional decomposition under constraints. — Probab. Theory and Related Fields, 1997, v. 109, № 1, p. 1–25.
4. *Волков С. Н.*, *Крамков Д. О.* О методологии хеджирования опционов. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 1998, т. 4, в. 1, с. 18–65.
5. *Föllmer H.*, *Kabanov Yu. M.* Optional decomposition and Lagrange multipliers. — Finance Stoch., 1998, v. 2, № 1, p. 69–81.
6. *Ширяев А. Н.* Основы стохастической финансовой математики. Т. 2. Теория. М.: Фазис, 1998, 544 с.
7. *Фёльмер Г.*, *Шид А.* Введение в стохастические финансы. Дискретное время. М.: МЦНМО, 2008, 496 с.
8. *Эллиотт Р.* Стохастический анализ и его приложения. М.: Мир, 1986, 351 с.
9. *Крылов Н. В.* Управляемые процессы диффузионного типа. М.: Наука, 1972, 400 с.
10. *Бертсекас Д.*, *Шрив С.* Оптимальное стохастическое управление. М.: Наука, 1985, 280 с.
11. *Бояринцева Н. С.*, *Хаметов В. М.* Новая теорема о представлении мартингалов (Дискретное время). — Матем. заметки, 2004, т. 75, в. 1, с. 40–54.
12. *Ширяев А. Н.* Вероятность. Т.1, 2. М.: МЦНМО, 2004, 927 с.
13. *Данфорд Н.*, *Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория. М.: ИЛ., 1962, 895 с.
14. *Дынкин Е. Б.*, *Евстигнеев И. В.* Регулярные условные математические ожидания соответствий. — Теория вероятн. и ее примен., 1976, т. XXI, в. 2, с. 334–347.
15. *Воробьев Н. Н.* Основы теории игр. Бескоалиционные игры. М.: Наука, 1984, 484 с.
16. *Зверев О. В.*, *Хаметов В. М.* Минимаксный суперхеджирующий портфель Европейского опциона. — В сб.: Российский экономический конгресс. Сборник докладов участников. М.: ИЭ РАН, 2009 (электронное издание).

Поступила в редакцию
20.XII.2010