

Секция «Прикладная вероятность и статистика»

БЕЛЯВСКИЙ Г. И., ДАНИЛОВА Н. В.

**ПРОЦЕССЫ ЛЕВИ
КРАТКИЙ КУРС¹⁾**

Содержание

Введение	195
Глава 1. Процессы Леви. Определение, классические примеры и безграничная делимость	198
Глава 2. Другие примеры процессов Леви	201
Глава 3. Субординированные процессы Леви	206
Глава 4. Мартингалы и процессы Леви	208
Глава 5. Пуассоновская мера.	214
Глава 6. Интеграл Ито. Процесс Ито	220
§ 6.1. Определения и формула Ито	220
§ 6.2. Теорема о представлении мартингала.	224
§ 6.3. Экспоненциальные мартингалы.	225
§ 6.4. Замена меры и процесс плотности	225
Глава 7. Интеграл по процессу Леви.	228
§ 7.1. Интеграл Леви–Винера.	229
§ 7.2. Процесс Орнштейна–Уленбека	230
Глава 8. Процесс Ито–Леви. Формула Ито–Леви. Экспоненциальный процесс Леви.	231
§ 8.1. Стохастическая экспонента Леви	232
§ 8.2. Экспоненциальный процесс Леви и преобразование Эшера.	233
Глава 9. Процессы Леви как марковские процессы	235
§ 9.1. Модель Мертона	237
Глава 10. Конструкция процессов Леви	239
§ 10.1. Случай конечной меры Леви	239
§ 10.2. Случай бесконечной меры Леви.	239
§ 10.3. Примеры субординированных гауссовских процессов	242
Глава 11. Дискретизация процессов Леви	245
§ 11.1. Дискретизация по времени	245
§ 11.2. Дискретизация по состояниям	246

© Редакция журнала «ОПиПМ», 2013 г.

¹⁾ От Редакции. Эта публикация — журнальная редакция одноименной монографии, издание которой в форме отдельной книги будет осуществлено позднее.

Глава 12. Моделирование процессов Леви	247
§ 12.1. Моделирование составного процесса Пуассона.	247
§ 12.2. Процесс с нормально распределенными скачками	249
§ 12.3. Модель Коу	249
§ 12.4. Генерация субординированных гауссовских процессов	252
§ 12.5. Приближение процесса Леви составным процессом Пуассона.	254
§ 12.6. Приближение процесса Леви процессом jump-diffusion	255
§ 12.7. Представление процесса Леви рядом	256
Глава 13. Модели Леви с изменяющимися параметрами	259
§ 13.1. Аппроксимации в модели Бэйтса	260
§ 13.2. Одна из моделей (B, S) -рынка	262
Глава 14. Процессы с независимыми приращениями.	264
§ 14.1. Аддитивные процессы	264
§ 14.2. Аддитивный процесс как марковский процесс.	267
§ 14.3. Аддитивная модель (B, S) -рынка.	267
§ 14.4. Негауссовский процесс Орнштейна–Уленбека	269
§ 14.5. Характеристическая функция и характеристики процесса Орнштейна– Уленбека	270
§ 14.6. Стационарные в широком смысле последовательности и аддитивные про- цессы	271
§ 14.7. Линейный фильтр	273
§ 14.8. Фрактальные последовательности	277
Глава 15. Вычисления в моделях под управлением процессов Леви.	279
§ 15.1. Метод Фурье.	279
§ 15.2. Метод деревьев	282
§ 15.3. Интегро-дифференциальное уравнение	283
§ 15.4. Метод Монте-Карло	285
Заключение	288
Список литературы	288

Заключение

Эта книга написана потому, что интерес к процессам со скачками постоянно растет. Во многих приложениях, и не только в финансовой математике, описание моделей посредством таких процессов выглядит более естественным, чем описания с помощью процессов с непрерывными траекториями. В то же время книги по процессам Леви на русском языке практически отсутствуют. По крайней мере, авторам такие книги не известны. Между тем исследования по процессам Леви в России весьма интенсивны. Следует упомянуть школу по финансовой математике, возглавляемую академиком Альбертом Николаевичем Ширяевым и школу Южного федерального университета. Авторы надеются, что, несмотря на небольшой объем, книга послужит хорошим введением в эту тематику.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bertoin J.* Lévy Processes. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1998, 278 p. (Ser. Cambridge Tracts in Mathematics. V. 121.)
2. *Sato K.-I.* Lévy Processes and Infinite Divisible Distributions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999, 500 p. (Ser. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. V. 68.)
3. *Samorodnitsky G., Taqqu M. S.* Stable Non-Gaussian Random Processes: Stochastic Models with Infinite Variance. London etc.: Chapman Hall, 1994, 656 p.
4. *Jacob N.* Pseudo-Differential Operators and Markov Processes. Berlin: Akademie-Verlag, 1996, 207 p. (Ser. Mathematical Research. V. 94.)
5. *Jacob N.* Pseudo-Differential Operators and Markov Processes. V. 1. Fourier Analysis and Semigroups. Singapore etc./London: World Scientific Publ./Imperial College Press, 2001, 516 p.
6. Lévy Processes. Theory and Applications. / Ed. by O.E. Barndorff-Nielsen, T. Mikosch, S.I. Resnick. Basel etc.: Birkhäuser, 2001, xi+418 p. (Ser. Birkhäuser Appl. Probab. Statist.)
7. *Cont R., Tankov P.* Financial Modelling With Jump Processes. London / Boca Raton, FL, etc.: Chapman Hall/CRC, 2003, 552 p. (Financial Math. Ser.)
8. *Øksendal B., Sulem-Bialobroda A.* Applied Stochastic Control of Jump Diffusions. 2nd ed. Heidelberg etc.: Springer, 2007, xvi+262 p.
9. *Boyarchenko S. I., Levendorski S. Z.* Non-Gaussian Merton–Black–Scholes Theory. Singapore etc.: World Scientific Publ., 2002, 420 p. (Ser. Advanced Series on Statistical Science and Applied Probability. V. 9.)
10. *Кудрявцев О. Е.* Современные численные методы решения интегро-дифференциальных уравнений, возникающих в приложениях. М.: Вузовская книга, 2010, 141 с.
11. *Karatzas I., Shreve S.E.* Brownian Motion and Stochastic Calculus 2nd ed. Heidelberg etc.: Springer, 1998, 470 p. (Ser. Graduate Texts in Mathematics. V. 113.)
12. *Revuz M., Yor M.* Continuous Martingales and Brownian Motion. Heidelberg etc.: Springer, 1991, 536 p. (Ser. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. V. 293.)
13. *Kunita H.* Stochastic Flows and Stochastic Differential Equations. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997, 364 p. (Ser. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, v. 24.)
14. *Jacod J., Shiryaev A. N.* Limit Theorems for Stochastic Processes. 2nd ed. Heidelberg etc.: Springer, 2003, xx+664 p. (Ser. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. V. 288.)

15. *Medvedev P.* Stochastic Integration Theory. Oxford: Oxford Univ. Press, 2007, 632 p. (Ser. Oxford Graduate Texts in Mathematics. V. 14.)
16. *Protter P. E.* Stochastic Integration and Differential Equations. 2nd ed. Heidelberg etc.: Springer, 2003, xiii+421 p. (Ser. Stochastic Modelling and Applied Probability. V. 21.)
17. *Lukacs E.* Characteristic Functions. 2nd ed., revised and enlarged. London: Griffin, 1970, x+350 p. (Русск. перев.: *Лукач Е.* Характеристические функции. / Пер. с англ. В. М. Золотарева со 2-го изд. М.: Наука, 1979, 424 с.)
18. *Applebaum D.* Lévy Processes and Stochastic Calculus. 2nd ed. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2009, 492 p. (Ser. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. V. 116.)
19. *Gregelionis B.* On subordinated multivariate Gaussian Lévy processes. Acta Appl. Math., 2007, v. 96. p. 233-246.
20. *Berg C., Forst G.* Non-symmetric translation invariant Dirichlet forms. — Invent. Math., 1973, v. 21, is. 3, p. 199–212.
21. *Rogers L. C. G., Williams D.* Diffusions, Markov Processes and Martingales. V. 1. Foundations; V. 2. Itô Calculus. 2nd ed. reissued from 2nd ed. published by J. Wiley & Sons Ltd in 1994. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000, 410 p.; 496 p. (Ser. Cambridge Math. Library.)
22. *Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L.* Regular Variation. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1987, 516 p. (Ser. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. V. 27.)
23. *Øksendal B.* Stochastic Differential Equations. An Introduction with Applications. Heidelberg etc.: Springer, 2003, xxvii+379 p.
24. *Ширяев А.* Основы стохастической финансовой математики. Т. 1. Факты. Модели; Т. 2. Теория. М.: ФАЗИС, 1998, 512 с.; 544 с. (Сер. Стохастика. В. 2; 3.)
25. *Гурсанов И. В.* О преобразовании одного класса случайных процессов с помощью абсолютно-непрерывной замены меры. — Теория вероятн. и ее примен., 1960, т. V, в. 3, с. 314–330.
26. *Камке Е.* Интеграл Лебега–Стилтьеса. М.: Физматгиз, 1959, 328 с.
27. *Merton R. C.* Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. — J. Financ. Econom., 1976, v. 3, is. 1-2, p. 125–144.
28. *Kou S. G., Wang H.* First passage times of a jump diffusions process. — Adv. Appl. Probab., 2003, v. 35, is. 2, p. 504–531.
29. *Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М.* Численные методы. М.: Бином, 2003, 632 с.
30. *Jakel P.* Monte Carlo method in finance. N. Y. etc.: Wiley, 2002, 238 с.
31. *Bates D. S.* Jumps and Stochastic Volatility: Exchange Rate Processes Implicit Options in Deutsche Mark. — Rev. Financ. Stud., 1996, v. 9(1), p. 69–107.
32. *Wiggins J. B.* Option values under stochastic volatilities: Theory and empirical estimates. — J. Financ. Econom., 1987, v. 19, is. 2, p. 351–372.
33. *Белявский Г. И., Данилова Н. В.* Диффузионные модели со случайным переключением параметров. Расчеты и финансовые приложения. Saarbrücken: Lambert Acad. Publ., 2012, 132 с.
34. *Кингман Дж.* Пуассоновские процессы. М.: Изд-во МЦНМО, 2007, 136 с.
35. *Vasicek O.* An equilibrium characterization of the term structure. — J. Financ. Econom., 1977, v. 5, is. 2, p. 177–188.
36. *Ширяев А.* Вероятность-2. Суммы и последовательности случайных величин — стационарные, мартингалы, марковские цепи. 3-е изд., перераб. и доп. М.: Изд-во МЦНМО, 2004, 408 с.

Поступила в редакцию
21.III.2013