

Прямые последствия реализации воздействия на объект оцениваются значениями целевой функции. Косвенные последствия оцениваются в каждом конкретном случае на основе решения  $\mathbf{x}^*$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 16-06-00048а).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ашихмин В. Н., Гитман М. Б., Келлер И. Э., Наймарк О. Б., Столбов В. Ю., Трусов П. В., Фрик П. Г. Введение в математическое моделирование. М.: Логос, 2005.

#### **В. И. Хохлов, О. В. Висков** (Москва, МИ РАН). **Обобщенное моментное тождество для отрицательного биномиального распределения.**

Подход к решению задачи линеаризации для произведений многочленов, ортогональных относительно классических распределений, разработанный и успешно примененный для систем (вероятностных) многочленов Эрмита, ортогональных относительно стандартного нормального распределения (см. [4], [7]), и многочленов Пуассона–Шарлье, ортогональных относительно (дискретного) распределения Пуассона (см. [5], [6]) основывался на получении обобщений (характеризационных моментных) тождеств Стейна [9] и Чена [10].

Когда было найдено аналогичное (как оказалось, характеризационное) моментное тождество для отрицательного биномиального распределения (распределения Паскаля), опубликованное в [8], появилась надежда, что можно найти некое его обобщение сродни упомянутым обобщениям тождеств Стейна и Чена, дающее возможность применить такой же подход и к решению задачи линеаризации для произведений многочленов, ортогональных относительно отрицательного биномиального распределения  $\text{NBi}(r, p)$  (распределения Паскаля) с параметрами  $r \in \mathbf{R}$  ( $r \in \mathbf{N}$ ) и  $p \in (0, 1)$ . Напомним, что это распределение определяется выражением

$$\mathbf{P}\{\Pi_{r,p} = \nu\} = \binom{r+\nu-1}{\nu} p^r q^\nu, \quad \text{где } \nu \in \mathbf{N}, 1 - q = p > 0.$$

Предъявим это обобщение.

**Утверждение.** Для отрицательного биномиального распределения (распределения Паскаля)<sup>1)</sup> справедливо следующее моментное тождество:

$$(\forall g \in \mathbb{G}^{\text{NBi}}) \quad \mathbf{M} H_\alpha(\Pi_{r,p}) g(\Pi_{r,p}) = [r]_\alpha q^\alpha \mathbf{M} \left( \frac{\Delta}{p\mathcal{I} - q\Delta} \right)^\alpha [g(\Pi_{r,p})], \quad (1)$$

где  $\Pi_{r,p} \sim \text{NBi}(r, p)$ ,  $\mathbb{G}^{\text{NBi}}$  есть множество всех ограниченных функций, с которыми  $\mathbf{M} |\Delta^n g(\Pi_{r,p})| < \infty$ ,  $[r]_\alpha = r(r+1) \cdots (r+n-1)$ ,  $H_\alpha(x)$  есть многочлен (Мейкснера) степени  $\alpha$  из системы многочленов, ортогональных относительно распределения  $\text{NBi}(r, p)$ . Здесь  $\Delta$  есть оператор взятия разности:  $\Delta[f(x)] = f(x+1) - f(x)$ ,  $\mathcal{I}$  есть тождественный оператор:  $\mathcal{I}[f(x)] = f(x)$ .

Доказательство проводится методом математической индукции, в котором базой ( $n=1$ ) является установленное в [8] тождество

$$\mathbf{M} \Pi_{r,p} g(\Pi_{r,p}) = \mathbf{M} \widetilde{W} [g(\Pi_{r,p})], \quad \text{где } \widetilde{W} = r \frac{q}{p} \frac{\mathcal{I} + \Delta}{\mathcal{I} - (q/p)\Delta}.$$

<sup>1)</sup> А также для геометрического распределения, соответствующего  $r=1$ .

При проведении шага индуктивного перехода, на котором, не ограничивая общности, можно проверять справедливость доказываемого соотношения на функции  $g(x)$ , являющейся многочленом  $H_\beta(x)$  из этой же системы, используются два особенных свойства, которыми обладает тесно связанный с оператором  $\widetilde{W}$  оператор

$$W = \frac{\Delta}{p\mathcal{I} - q\Delta}.$$

Первое из них состоит в том, что его действие на ненормированные многочлены (первого рода)

$$\tilde{H}_\alpha = \left( [x] - \frac{q}{p} [\alpha + r - 1] \right)^\alpha, \quad \alpha = 0, 1, 2, \dots,$$

ортогональные относительно распределения  $\text{NBi}(r, p)$ , описывается (похожим на правило дифференцирования степенной функции) соотношением

$$W [\tilde{H}_\alpha(x)] = \alpha \tilde{H}_{\alpha-1}(x) \quad \alpha = 1, 2, \dots$$

(использована факториально-степенная запись этих многочленов, см. [1], [2] и [8]). Это соотношение является следствием более общей формулы, приведенной в [3, с. 381] для функций, разлагаемых по этим многочленам.

Второе свойство оператора  $W$  — это то, как он действует на математическое ожидание убывающей факториальной степени случайной величины  $\Pi_{r,p}$ :

$$\mathbf{M} W [\Pi_{r,p}^\alpha] = \frac{\alpha}{qr} \mathbf{M} [\Pi_{r,p}^\alpha]$$

(здесь в левой части охватывающие скобки используются для указания того, к какой функции применяется оператор, а внутренние обозначают убывающую факториальную степень  $[x]^\alpha = x(x-1) \cdots (x-\alpha+1)$ ).  $\square$

В больших деталях доказательство утверждения и способ применения тождества (1) к решению задачи линеаризации для произведения многочленов (Мейкснера) будут изложены в отдельной публикации.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хохлов В.И. Многочлены, ортогональные относительно полиномиального распределения, и факториально-степенной формализм. — Теория вероятн. и ее примен., 2001, т. 46, в. 3, с. 585–594.
2. Хохлов В.И. Многочлены, ортогональные относительно отрицательного биномиального распределения. — Обзорение прикл. и. промышл. матем., 2004, т. 11, в. 3, с. 487–492. (Письмо в редакцию. — Обзорение прикл. и. промышл. матем., 2005, т. 12, в. 1, с. 207.)
3. Прохоров Ю.В., Висков О.В., Хохлов В.И. Аналогии неравенства Чернова для отрицательного биномиального распределения. — Теория вероятн. и ее примен., 2005, т. 50, в. 2, с. 379–382.
4. Прохоров Ю.В., Висков О.В., Хохлов В.И. Обобщенное тождество Стейна и его применение к задаче линеаризации для многочленов Эрмита. — Обзорение прикл. и промышл. матем., 2012, т. 18, в. 6, с. 833–838.
5. Прохоров Ю.В., Висков О.В., Хохлов В.И. Многочлены Пуассона–Шарлье и обобщение тождества Чена. — Обзорение прикл. и промышл. матем., 2012, т. 19, в. 1, с. 3–8.
6. Хохлов В.И., Висков О.В., Прохоров Ю.В. Применение обобщенного тождества Чена к задаче линеаризации для произведений многочленов Пуассона–Шарлье. — Обзорение прикл. и промышл. матем., 2012, т. 19, в. 3, с. 472–473.
7. Висков О.В., Прохоров Ю.В., Хохлов В.И. Прямое доказательство обобщенного тождества Стейна. — Обзорение прикл. и промышл. матем., 2012, т. 19, в. 5, с. 731–732.

8. Висков О.В., Прохоров Ю.В., Хохлов В.И. Характеризационное тождество для распределения Паскаля. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2013, т. 20, в. 4, с. 532–533.
9. Stein C. A bound for the error in the normal approximation to the distribution of a sum of dependent random variables. — In: Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. V. II. Probability Theory. Berkeley, CA: Univ. California Press, 1972, p. 583–602.
10. Chen L. H. Y. Poisson approximation for dependent trials. — Ann. Probab., 1975, v. 3, № 3, p. 534–545.

**О. О. Шестак, М. А. Шеремет (Томск, НИ ТГУ). Интенсификация теплообмена вблизи изотермической вертикальной поверхности, помещенной в наножидкость.**

Моделирование технических и природных систем, в которых режимы конвективного теплопереноса являются определяющими, стало весьма популярным предметом исследования, в связи с развитием и модернизацией современных технологий, а получающие все большее распространение микро и нанотехнологии диктуют необходимость уменьшения размеров и массы элементов систем охлаждения и разработки эффективных методов управления теплообменом для увеличения эффективности работы и срока службы. Для обеспечения эффективного теплообмена прибегают к различным методам интенсификации. Одним из перспективных способов интенсификации теплообменных процессов представляется повышение теплопроводности теплоносителя (жидкости, газа или другой базовой среды) путем добавления в него наночастиц высокотеплопроводного материала. Суспензии на основе наночастиц твердой фазы называются наножидкостями [1–3].

В работе, представленной данным сообщением, рассматривается естественная конвекция вблизи равномерно нагретой вертикальной поверхности достаточно большой протяженности, помещенной в наножидкость с постоянными теплофизическими свойствами. Состав наножидкости — это вода, содержащая один из пяти различных видов наночастиц: медь (Cu), серебро (Ag), оксид алюминия ( $Al_2O_3$ ), оксид меди (CuO) и оксид титана ( $TiO_2$ ). Также рассматриваются различные модели для эффективных коэффициентов теплопроводности и динамической вязкости наножидкости, описанные в [1–3].

Определяющие уравнения пограничного слоя для вертикальной поверхности, помещенной в наножидкость, могут быть записаны в следующем виде:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{(\rho\beta)_{nf} g (T - T^e)}{\rho_{nf}}, \quad (2)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha_{nf} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad \alpha_{nf} = \frac{k_{nf}}{(\rho C_p)_{nf}}, \quad (3)$$

где  $u$  и  $v$  компоненты скорости,  $\rho_{nf}$  плотность наножидкости,  $\mu_{nf}$  динамическая вязкость наножидкости,  $\beta_{nf}$  коэффициент теплового расширения наножидкости,  $k_{nf}$  коэффициент теплопроводности наножидкости,  $T^e$  температура окружающей среды,  $g$  ускорение свободного падения,  $(\rho C_p)_{nf}$  теплоемкость наножидкости.

Уравнения пограничного слоя с соответствующими граничными условиями были преобразованы к обыкновенным дифференциальным уравнениям методом переменной подобия и решены с использованием метода Рунге–Кутты четвертого порядка точности совместно с процедурой пристрелки. Разработанный алгоритм был успешно протестирован на модельной задаче [4].