

ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
ТОМ 23 МАТЕМАТИКИ Выпуск 5
2016

Секция «Прикладная вероятность и статистика»

ХОХЛОВ В. И., ВИСКОВ О. В.

**ОБОБЩЕННОЕ МОМЕНТНОЕ ТОЖДЕСТВО
ДЛЯ ОТРИЦАТЕЛЬНОГО БИНОМИАЛЬНОГО
РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ
В ЗАДАЧЕ ЛИНЕАРИЗАЦИИ**

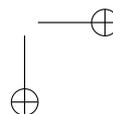
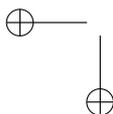
На основе операторного подхода с использованием комбинаторной техники факториально-степенного формализма получено обобщенное моментное тождество для отрицательного биномиального распределения (распределения Паскаля). Полученное тождество применено для решения задачи линейаризации произведений многочленов, ортогональных относительно этого распределения.

Ключевые слова и фразы: отрицательное биномиальное распределение, распределение Паскаля, обобщенное моментное тождество, многочлены, ортогональные относительно отрицательного биномиального распределения, многочлены Мейкснера, линейаризация произведений ортогональных многочленов.

Подход к решению задачи линейаризации для произведений многочленов, ортогональных относительно классических распределений, разработанный и успешно примененный для систем (вероятностных) многочленов Эрмита, ортогональных относительно стандартного нормального распределения [4], и многочленов Пуассона–Шарлье, ортогональных относительно (дискретного) распределения Пуассона [14], основывался на получении обобщений [3, 5, 9] классических (характеризационных) моментных тождеств Стейна [19] и Чена [15].

Когда было найдено аналогичное (как оказалось, характеризационное) моментное тождество для отрицательного биномиального распределения (распределения Паскаля), опубликованное в [6], появилась надежда, что можно найти некое его обобщение сродни упомянутым обобщениям тождеств Стейна и Чена, дающее возможность применить этот подход к решению задачи линейаризации для произведений многочленов, ортогональных относительно отрицательного биномиального распределения.

Надежда оправдалась, и в данной работе сначала показано, как было получено анонсированное в [13] обобщение моментного тождества из [6] для отрицательного биномиального распределения, а вслед за этим приведено решение задачи линейаризации для многочленов, ортогональных относительно этого распределения.



1°. *Отрицательное биномиальное распределение и многочлены Мейкснера.* В этом вводном разделе собраны сведения и обозначения, облегчающие понимание выкладок в последующих разделах.

Напомним, что отрицательное биномиальное распределение $\text{NBi}(r, p)$ (распределение Паскаля) с параметрами $r \in \mathbf{R}^+ \setminus \{0\}$ (соответственно, $r \in \mathbf{N}$)¹⁾ и $p \in (0, 1)$ (см., например, [7, с. 436]) — это дискретное распределение случайной величины $\Pi_{r,p}$, определяемое выражением

$$\mathbf{P}\{\Pi_{r,p}=\nu\} = \binom{r+\nu-1}{\nu} p^r q^\nu, \quad \text{где } \nu \in \mathbf{N}, 1-q=p>0. \quad (1)$$

Если условиться о записи $[a]_\alpha = a(a+1)\cdots(a+\alpha-1)$ (аналог символа Похгаммера) для возрастающей факториальной степени α числа a и о записи $[a]^\alpha = a(a-1)\cdots(a-\alpha+1)$ для убывающей факториальной степени α числа a , полагая $[a]_0 = [a]^0 = 1$, то вероятность $\mathbf{P}\{\Pi_{r,p}=\nu\}$ в (1) можно записать в виде

$$\frac{[-r]^\nu}{\nu!} p^r (-q)^\nu = \frac{[r]_\nu}{\nu!} p^r q^\nu \stackrel{\text{def}}{=} p^r j(\nu), \quad \nu \in \mathbf{N}, \quad (2)$$

а факториальные моменты случайной величины $\Pi_{r,p}$ — в виде

$$\mathbf{M}[\Pi_{r,p}]^\alpha = [r]_\alpha \left(\frac{q}{p}\right)^\alpha, \quad \alpha = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

Функция $j(\nu)$, определенная последним из соотношений в (2), — это один из многих примеров тех функций, которые в теории специальных функций и ортогональных многочленов называют *функцией скачков*. Эти функции служат дискретными аналогами *весовых функций* $\mu(x)$, которые задают те скалярные произведения, относительно которых определяется ортогональность многочленов. В функциональном анализе и в теории вероятностей с этими функциями обычно связывают *меры* и *вероятностные меры* соответственно.

Напомним, что многочлены $P_\alpha(x)$ и $P_\beta(x)$ из семейства многочленов $\{P_\gamma(x)\}_{\gamma=0,1,2,\dots}$ от (вещественного) x называются *ортогональными* относительно *весовой функции* $\mu(x)$, если

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_\alpha(x) P_\beta(x) d\mu(x) = c_{\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta},$$

где $\delta_{\alpha\beta}$ есть дельта Кронекера. Для функции скачков интеграл в этом определении заменяется на сумму или ряд:

$$\sum_{x=-\infty}^{\infty} P_\alpha(x) P_\beta(x) j(x) = c_{\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta}.$$

¹⁾ При $r=1$ получается геометрическое распределение.

Семейство многочленов $\{Me_\alpha(x)\}_{\alpha \in \mathbb{N}}$, ортогональных относительно функции скачков $j(x)$ из определения дискретной вероятностной меры (1), изучалось в работах [18] и [16, случай $r = 1$]. Многочлены $Me_\alpha(x)$ называются многочленами Мейкснера.

Приведем для них определяющее соотношение ортогональности

$$\sum_{x=0}^{\infty} Me_\alpha(x) Me_\beta(x) j(x) = \frac{\alpha! [r]_\alpha}{q^\alpha p^r} \delta_{\alpha\beta}$$

и выражение в явном виде

$$Me_\alpha(x) = [r]_\alpha {}_2F_1\left(-\alpha, -x; r; -\frac{p}{q}\right) = [r]_\alpha \sum_{\gamma=0}^{\infty} \frac{[-\alpha]_\gamma [-x]_\gamma}{\gamma! [r]_\gamma} \left(-\frac{p}{q}\right)^\gamma \quad (4)$$

через гипергеометрический ряд ${}_2F_1$ (см., например, [1, с. 69, формула (2)] и [2, с. 222, формула (9)]).

В работах [12] и [8] были приведены две системы многочленов, ортогональных относительно отрицательного биномиального распределения (1). Эти многочлены были записаны в форме так называемых факториально-степенных биномов (подробнее о факториально-степенном формализме и его пользе для сокращения комбинаторных выкладок и действий с гипергеометрическими рядами см. [11]):

$$\tilde{H}_\alpha(x) = \left([x] - \frac{q}{p} [\alpha+r-1]\right)^\alpha \quad (\alpha = 0, 1, 2, \dots); \quad (5)$$

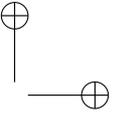
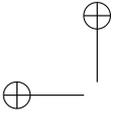
$$\tilde{H}_\alpha^*(x) = ([x] + q[-r-x])^\alpha \quad (\alpha = 0, 1, 2, \dots), \quad (6)$$

и хотя их записи «эквивалентны» с точностью до сомножителя:

$$\begin{aligned} p^\alpha \tilde{H}_\alpha(x) &= (p[x] - q[\alpha+r-1])^\alpha = \sum_{\nu=0}^{\alpha} \frac{[\alpha]^\nu}{\nu!} p^\nu [x]^\nu (-q)^{\alpha-\nu} [\alpha+r-1]^{\alpha-\nu} \\ &= \sum_{\nu=0}^{\alpha} \frac{[\alpha]^\nu}{\nu!} p^\nu [x]^\nu q^{\alpha-\nu} [-r-\nu]^{\alpha-\nu} \\ &= \sum_{\nu=0}^{\alpha} \frac{[\alpha]^\nu}{\nu!} p^\nu [x]^\nu q^{\alpha-\nu} [-r-x+x-\nu]^{\alpha-\nu} \\ &= \sum_{\nu=0}^{\alpha} \frac{[\alpha]^\nu}{\nu!} p^\nu [x]^\nu q^{\alpha-\nu} \sum_{\mu=0}^{\alpha-\nu} \frac{[\alpha-\nu]^\mu}{\mu!} [-r-x]^{\alpha-\nu-\mu} [x-\nu]^\mu \\ &= \sum_{\nu=0}^{\alpha} \sum_{\mu=0}^{\alpha-\nu} \frac{[\alpha]^{\nu+\mu}}{\nu! \mu!} p^\nu [x]^{\nu+\mu} q^{\alpha-\nu} [-r-x]^{\alpha-\nu-\mu} \\ &= \sum_{\gamma=0}^{\alpha} \sum_{\nu=0}^{\gamma} \frac{[\alpha]^{\nu+\gamma-\nu}}{\nu! (\gamma-\nu)!} p^\nu [x]^{\nu+\gamma-\nu} q^{\alpha-\nu} [-r-x]^{\alpha-\nu-\gamma+\nu} \\ &= \sum_{\gamma=0}^{\alpha} \frac{[\alpha]^\gamma}{\gamma!} [x]^\gamma q^{\alpha-\gamma} [-r-x]^{\alpha-\gamma} \sum_{\nu=0}^{\gamma} \frac{\gamma!}{\nu! (\gamma-\nu)!} p^\nu q^{\gamma-\nu} = \tilde{H}_\alpha^*(x), \end{aligned}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. / Пер. с англ. Н. Я. Виленкина. М.: Наука/Физматлит, 1965, 296 с.
2. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя. Функции параболического цилиндра. Ортогональные многочлены. / Пер. с англ. Н. Я. Виленкина. М.: Наука/Физматлит, 1966, 296 с.
3. Висков О. В. Некоммутативный подход к классическим задачам анализа. — Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1986, т. 177, с. 21–32.
4. Висков О. В., Прохоров Ю. В., Хохлов В. И. Обобщенное тождество Стейна и его применение к задаче линейаризации для многочленов Эрмита. — Обзорение прикл. и промышл. матем., 2011, т. 18, в. 3, с. 833–838.
5. Висков О. В., Прохоров Ю. В., Хохлов В. И. Прямое доказательство обобщенного тождества Стейна. — Обзорение прикл. и промышл. матем., 2012, т. 19, в. 5, с. 731–732.
6. Висков О. В., Прохоров Ю. В., Хохлов В. И. Характеризационное тождество для распределения Паскаля. — Обзорение прикл. и промышл. матем., 2013, т. 20, в. 4, с. 532–533.
7. Прохоров А. В. Отрицательное биномиальное распределение. — В энциклопедии: Теория вероятностей и математическая статистика. / Под ред. Ю. В. Прохорова и др. М.: БРЭ, 1999, с. 436.
8. Прохоров Ю. В., Висков О. В., Хохлов В. И. Аналоги неравенства Чернова для отрицательного биномиального распределения. — Теория вероятн. и ее примен., 2005, т. 50, в. 2, с. 379–382.
9. Прохоров Ю. В., Висков О. В., Хохлов В. И. Многочлены Пуассона–Шарлье и обобщение тождества Чена. — Обзорение прикл. и промышл. матем., 2012, т. 19, в. 1, с. 3–8.
10. Сеге Г. Ортогональные многочлены. М.: Физматлит, 1962, 500 с.
11. Хохлов В. И. Многочлены, ортогональные относительно полиномиального распределения, и факториально-степенной формализм. — Теория вероятн. и ее примен., 2001, т. 46, в. 3, с. 585–594.
12. Хохлов В. И. Многочлены, ортогональные относительно отрицательного биномиального распределения. — Обзорение прикл. и промышл. матем., 2004, т. 11, в. 3, с. 487–492. (Письмо в редакцию. — Обзорение прикл. и промышл. матем., 2005, т. 12, в. 1, с. 207.)
13. Хохлов В. И., Висков О. В. Обобщенное моментное тождество для отрицательного биномиального распределения. — Обзорение прикл. и промышл. матем., 2011, т. 23, в. 4, с. 393–395.
14. Хохлов В. И., Висков О. В., Прохоров Ю. В. Применение обобщенного тождества Чена к задаче линейаризации для произведений многочленов Пуассона–Шарлье. — Обзорение прикл. и промышл. матем., 2012, т. 19, в. 3, с. 472–473.
15. Chen L. H. Y. Poisson approximation for dependent trials. — Ann. Probab., 1975, v. 3, № 3, p. 534–545.
16. Gottlieb M. J. Concerning some polynomials orthogonal on a finite or enumerable set of points. — Amer. J. Math., 1938 (April), v. 60, № 2, p. 453–458.
17. Khokhlov V. I., Prokhorov Yu. V., Viskov O. V. An approach to the linearization problem for Hermite Polynomials. — In: ICIAM 2011: 7th International Congress on Industrial and Applied Mathematics. (Vancouver, BC, Canada, July 18–22, 2011). / Ed. by R. Jeltsch et al. Winnipeg/Philadelphia: CAIMS–SCMAI/SIAM, 2011, p. 29.



18. *Meixner J.* Orthogonale Polynomsysteme mit einer besonderen Gestalt der erzeugenden Funktion. — J. London Math. Soc., 1934 (January), v. 9, part 1, № 33, p. 6–13.
19. *Stein C.* A bound for the error in the normal approximation to the distribution of a sum of dependent random variables. — In: Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. V. II. Probability Theory. /Ed. by L. M. Le Cam, J. Neyman, E. L. Scott. Berkeley, CA: Univ. California Press, 1972, p. 583–602.

Поступила в редакцию
15.XII.2016

