ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 23 МАТЕМАТИКИ Выпуск 5
2016

Секция **«Прикладная вероятность и статистика»**

ХОХЛОВ В. И., ВИСКОВ О. В.

ОБОБЩЕННОЕ МОМЕНТНОЕ ТОЖДЕСТВО ДЛЯ ОТРИЦАТЕЛЬНОГО БИНОМИАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ В ЗАДАЧЕ ЛИНЕАРИЗАЦИИ

На основе операторного подхода с использованием комбинаторной техники факториально-степенного формализма получено обобщенное моментное тождество для отрицательного биномиального распределения (распределения Паскаля). Полученное тождество применено для решения задачи линеаризации произведений многочленов, ортогональных относительно этого распределения.

Ключевые слова и фразы: отрицательное биномиальное распределение, распределение Паскаля, обобщенное моментное тождество, многочлены, ортогональные относительно отрицательного биномиального распределения, многочлены Мейкснера, линеаризация произведений ортогональных многочленов.

Подход к решению задачи линеаризации для произведений многочленов, ортогональных относительно классических распределений, разработанный и успешно примененный для систем (вероятностных) многочленов Эрмита, ортогональных относительно стандартного нормального распределения [4], и многочленов Пуассона–Шарлье, ортогональных относительно (дискретного) распределения Пуассона [14], основывался на получении обобщений [3, 5, 9] классических (характеризационных) моментных тождеств Стейна [19] и Чена [15].

Когда было найдено аналогичное (как оказалось, характеризационное) моментное тождество для отрицательного биномиального распределения (распределения Паскаля), опубликованное в [6], появилась надежда, что можно найти некое его обобщение сродни упомянутым обобщениям тождеств Стейна и Чена, дающее возможность применить этот подход к решению задачи линеаризации для произведений многочленов, ортогональных относительно отрицательного биномиального распределения.

Надежда оправдалась, и в данной работе сначала показано, как было получено анонсированное в [13] обобщение моментного тождества из [6] для отрицательного биномиального распределения, а вслед за этим приведено решение задачи линеаризации для многочленов, ортогональных относительно этого распределения.

1°. *Отрицательное биномиальное распределение и многочлены Мейкснера.* В этом вводном разделе собраны сведения и обозначения, облегчающие понимание выкладок в последующих разделах.

Напомним, что отрицательное биномиальное распределение $\mathrm{NBi}\,(r,p)$ (распределение Паскаля) с параметрами $r \in \mathbf{R}^+ \setminus \{0\}$ (соответственно, $r \in \mathbf{N}$)[1)] и $p \in (0,1)$ (см., например, [7, с. 436]) — это дискретное распределение случайной величины $\Pi_{r,p}$, определяемое выражением

$$\mathbf{P}\,\{\Pi_{r,p} = \nu\} = \binom{r+\nu-1}{\nu} p^r q^\nu, \quad \text{где} \quad \nu \in \mathbf{N},\ 1-q=p>0. \tag{1}$$

Если условиться о записи $[a]_\alpha = a(a+1)\cdots(a+\alpha-1)$ (аналог символа Похгаммера) для возрастающей факториальной степени α числа a и о записи $[a]^\alpha = a(a-1)\cdots(a-\alpha+1)$ для убывающей факториальной степени α числа a, полагая $[a]_0 = [a]^0 = 1$, то вероятность $\mathbf{P}\,\{\Pi_{r,p} = \nu\}$ в (1) можно записать в виде

$$\frac{[-r]^\nu}{\nu!}\, p^r (-q)^\nu = \frac{[r]_\nu}{\nu!}\, p^r q^\nu \overset{\text{def}}{=} p^r j(\nu), \qquad \nu \in \mathbf{N}, \tag{2}$$

а факториальные моменты случайной величины $\Pi_{r,p}$ — в виде

$$\mathbf{M}\left[\Pi_{r,p}\right]^\alpha = [r]_\alpha \left(\frac{q}{p}\right)^\alpha, \qquad \alpha = 0,1,2,\ldots \tag{3}$$

Функция $j(\nu)$, определенная последним из соотношений в (2), — это один из многих примеров тех функций, которые в теории специальных функций и ортогональных многочленов называют *функцией скачков*. Эти функции служат дискретными аналогами *весовых функций* $\mu(x)$, которые задают те скалярные произведения, относительно которых определяется ортогональность многочленов. В функциональном анализе и в теории вероятностей с этими функциями обычно связывают *меры* и *вероятностные меры* соответственно.

Напомним, что многочлены $\mathrm{P}_\alpha(x)$ и $\mathrm{P}_\beta(x)$ из семейства многочленов $\{\mathrm{P}_\gamma(x)\}_{\gamma=0,1,2,\ldots}$ от (вещественного) x называются *ортогональными* относительно *весовой функции* $\mu(x)$, если

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{P}_\alpha(x)\,\mathrm{P}_\beta(x)\,d\mu(x) = c_{\alpha\beta}\,\delta_{\alpha\beta},$$

где $\delta_{\alpha\beta}$ есть дельта Кронекера. Для функции скачков интеграл в этом определении заменяется на сумму или ряд:

$$\sum_{x=-\infty}^{\infty} \mathrm{P}_\alpha(x)\,\mathrm{P}_\beta(x)\,j(x) = c_{\alpha\beta}\,\delta_{\alpha\beta}.$$

[1)] При $r=1$ получается геометрическое распределение.

Семейство многочленов $\{\mathrm{Me}_\alpha(x)\}_{\alpha\in\mathbf{N}}$, ортогональных относительно функции скачков $j(x)$ из определения дискретной вероятностной меры (1), изучалось в работах [18] и [16, случай $r=1$]. Многочлены $\mathrm{Me}_\alpha(x)$ называются многочленами Мейкснера.

Приведем для них определяющее соотношение ортогональности

$$\sum_{x=0}^{\infty}\mathrm{Me}_\alpha(x)\,\mathrm{Me}_\beta(x)\,j(x)=\frac{\alpha!\,[r]_\alpha}{q^\alpha\,p^r}\delta_{\alpha\beta}$$

и выражение в явном виде

$$\mathrm{Me}_\alpha(x)=[r]_\alpha\;{}_2F_1\Big(-\alpha,-x;\,r;\,-\frac{p}{q}\Big)=[r]_\alpha\sum_{\gamma=0}^{\infty}\frac{[-\alpha]_\gamma\,[-x]_\gamma}{\gamma!\,[r]_\gamma}\Big(-\frac{p}{q}\Big)^\gamma \tag{4}$$

через гипергеометрический ряд ${}_2F_1$ (см., например, [1, с. 69, формула (2)] и [2, с. 222, формула (9)]).

В работах [12] и [8] были приведены две системы многочленов, ортогональных относительно отрицательного биномиального распределения (1). Эти многочлены были записаны в форме так называемых факториально-степенных биномов (подробнее о факториально-степенном формализме и его пользе для сокращения комбинаторных выкладок и действий с гипергеометрическими рядами см. [11]):

$$\widetilde{\mathrm{H}}_\alpha(x)=\Big([x]-\frac{q}{p}\,[\alpha+r-1]\Big)^\alpha\qquad(\alpha=0,1,2,\ldots); \tag{5}$$

$$\widetilde{\mathrm{H}}^*_\alpha(x)=\big([x]+q\,[-r-x]\big)^\alpha\qquad(\alpha=0,1,2,\ldots), \tag{6}$$

и хотя их записи «эквивалентны» с точностью до сомножителя:

$$\begin{aligned}
p^\alpha\,\widetilde{\mathrm{H}}_\alpha(x)\;&=\;\big(p\,[x]-q\,[\alpha+r-1]\big)^\alpha=\sum_{\nu=0}^{\alpha}\frac{[\alpha]^\nu}{\nu!}\,p^\nu\,[x]^\nu\,(-q)^{\alpha-\nu}[\alpha+r-1]^{\alpha-\nu}\\
&=\sum_{\nu=0}^{\alpha}\frac{[\alpha]^\nu}{\nu!}\,p^\nu\,[x]^\nu q^{\alpha-\nu}[-r-\nu]^{\alpha-\nu}\\
&=\sum_{\nu=0}^{\alpha}\frac{[\alpha]^\nu}{\nu!}\,p^\nu\,[x]^\nu q^{\alpha-\nu}[-r-x+x-\nu]^{\alpha-\nu}\\
&=\sum_{\nu=0}^{\alpha}\frac{[\alpha]^\nu}{\nu!}\,p^\nu\,[x]^\nu q^{\alpha-\nu}\sum_{\mu=0}^{\alpha-\nu}\frac{[\alpha-\nu]^\mu}{\mu!}\,[-r-x]^{\alpha-\nu-\mu}[x-\nu]^\mu\\
&=\sum_{\nu=0}^{\alpha}\sum_{\mu=0}^{\alpha-\nu}\frac{[\alpha]^{\nu+\mu}}{\nu!\,\mu!}\,p^\nu\,[x]^{\nu+\mu}\,q^{\alpha-\nu}\,[-r-x]^{\alpha-\nu-\mu}\\
&=\sum_{\gamma=0}^{\alpha}\sum_{\nu=0}^{\gamma}\frac{[\alpha]^{\nu+\gamma-\nu}}{\nu!\,(\gamma-\nu)!}\,p^\nu\,[x]^{\nu+\gamma-\nu}\,q^{\alpha-\nu}\,[-r-x]^{\alpha-\nu-\gamma+\nu}\\
&=\sum_{\gamma=0}^{\alpha}\frac{[\alpha]^\gamma}{\gamma!}\,[x]^\gamma\,q^{\alpha-\gamma}[-r-x]^{\alpha-\gamma}\sum_{\nu=0}^{\gamma}\frac{\gamma!}{\nu!\,(\gamma-\nu)!}\,p^\nu\,q^{\gamma-\nu}=\widetilde{\mathrm{H}}^*_\alpha(x),
\end{aligned}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бейтмен Г.*, *Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. / Пер. с англ. Н. Я. Виленкина. М.: Наука/Физматлит, 1965, 296 с.
2. *Бейтмен Г.*, *Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя. Функции параболического цилиндра. Ортогональные многочлены. / Пер. с англ. Н. Я. Виленкина. М.: Наука/Физматлит, 1966, 296 с.
3. *Висков О. В.* Некоммутативный подход к классическим задачам анализа. — Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1986, т. 177, с. 21–32.
4. *Висков О. В.*, *Прохоров Ю. В.*, *Хохлов В. И.* Обобщенное тождество Стейна и его применение к задаче линеаризации для многочленов Эрмита. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2011, т. 18, в. 3, с. 833–838.
5. *Висков О.В.*, *Прохоров Ю.В.*, *Хохлов В.И.* Прямое доказательство обобщенного тождества Стейна. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2012, т. 19, в. 5, с. 731–732.
6. *Висков О.В.*, *Прохоров Ю.В.*, *Хохлов В.И.* Характеризационное тождество для распределения Паскаля. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2013, т. 20, в. 4, с. 532–533.
7. *Прохоров А. В.* Отрицательное биномиальное распределение. — В энциклопедии: Теория вероятностей и математическая статистика. / Под ред. Ю. В. Прохорова и др. М.: БРЭ, 1999, с. 436.
8. *Прохоров Ю.В.*, *Висков О.В.*, *Хохлов В.И.* Аналоги неравенства Чернова для отрицательного биномиального распределения. — Теория вероятн. и ее примен., 2005, т. 50, в. 2, с. 379–382.
9. *Прохоров Ю.В.*, *Висков О.В.*, *Хохлов В.И.* Многочлены Пуассона–Шарлье и обобщение тождества Чена. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2012, т. 19, в. 1, с. 3–8.
10. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены. М.: Физматлит, 1962, 500 с.
11. *Хохлов В. И.* Многочлены, ортогональные относительно полиномиального распределения, и факториально-степенной формализм. — Теория вероятн. и ее примен., 2001, т. 46, в. 3, с. 585–594.
12. *Хохлов В. И.* Многочлены, ортогональные относительно отрицательного биномиального распределения. — Обозрение прикл. и. промышл. матем., 2004, т. 11, в. 3, с. 487–492. (Письмо в редакцию. — Обозрение прикл. и. промышл. матем., 2005, т. 12, в. 1, с. 207.)
13. *Хохлов В. И.*, *Висков О. В.* Обобщенное моментное тождество для отрицательного биномиального распределения. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2011, т. 23, в. 4, с. 393–395.
14. *Хохлов В.И.*, *Висков О.В.*, *Прохоров Ю.В.* Применение обобщенного тождества Чена к задаче линеаризации для произведений многочленов Пуассона–Шарлье. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2012, т. 19, в. 3, с. 472–473.
15. *Chen L.* H. *Y.* Poisson approximation for dependent trials. — Ann. Probab., 1975, v. 3, № 3, p. 534–545.
16. *Gotlieb M. J.* Concerning some polynomials orthogonal on a finite or enumerable set of points. — Amer. J. Math., 1938 (April), v. 60, № 2, p. 453–458.
17. *Khokhlov V. I.*, *Prokhorov Yu. V.*, *Viskov O. V.* An approach to the linearization problem for Hermite Polynomials. — In: ICIAM 2011: 7th International Congress on Industrial and Applied Mathematics. (Vancouver, BC, Canada, July 18–22, 2011). / Ed. by R. Jeltsch et al. Winnipeg/Philadelphia: CAIMS–SCMAI/SIAM, 2011, p. 29.

18. *Meixner J.* Orthogonale Polynomsysteme mit einer besonderen Gestalt der erzeugenden Funktion. — J. London Math. Soc., 1934 (January), v. 9, part 1, № 33, p. 6–13.
19. *Stein C.* A bound for the error in the normal approximation to the distribution of a sum of dependent random variables. — In: Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. V. II. Probability Theory. / Ed. by L. M. Le Cam, J. Neyman, E. L. Scott. Berkeley, CA: Univ. California Press, 1972, p. 583–602.

Поступила в редакцию
15.XII.2016