

**XXVI ВСЕРОССИЙСКАЯ
ШКОЛА–КОЛЛОКВИУМ
ПО СТОХАСТИЧЕСКИМ МЕТОДАМ
(осенний семестр, 19 сентября — 9 октября 2022 г.)**

Секция «Вероятностные аспекты теории функций
и функционального анализа»

ХОХЛОВ В. И.

**«СЕПТАККОРД» МЕТОДОВ ПОИСКА
ВЕРоятНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИЗАЦИОННЫХ
МОМЕНТНЫХ ТОЖДЕСТВ И ПЯТЫЙ ЭЛЕМЕНТ
(К ПЯТИДЕСЯТИЛЕТИЮ МЕТОДА СТЕЙНА) ¹⁾**

УДК 519.2

DOI https://doi.org/10.52513/08698325_2022_29_1_7

Новый метод получения моментных характеристических тождеств типа тождества Стейна изложен в контексте методов, разработанных для этой цели ранее. В основе метода лежит функционально-операторный подход.

Ключевые слова и фразы: аннулятор вероятностной меры, моментный оператор, ортогональные многочлены, производящий оператор, характеристизатор вероятностной меры, характеристизации типа характеристизаций Стейна–Чена, характеристическое тождество.

§ 1. Введение

Развитие метода Стейна, без которого теперь трудно представить исследовательский инструментарий ряда областей прикладной теории вероятностей, в особенности области вероятностных методов дискретной математики, на протяжении всей своей пятидесятилетней истории происходит в двух основных направлениях. Одному из них — разработке методов поиска моментных характеристик распределений вероятностей — и посвящена эта работа. Отметим, что интерес к этому методу обусловлен, в первую очередь, его приспособленностью к получению оценки ошибки приближений для распределений сумм *зависимых* случайных величин.

Кроме того, в практически важных ситуациях этот метод дает возможность оценивать расстояния между допредельными и предельными (иногда называемыми целевыми и даже гнездовыми) распределениями и точно вычислять скорость сходимости в задачах стохастической аппроксимации, а также сравнивать пары распределений (см., например, [22], [2] и [15]).

© Редакция журнала «ОПиПМ», 2022 г.

¹⁾ От Редакции. Публикуется по решению Программного комитета ВШКСМ в качестве пленарного доклада в осеннем семестре XXVI Всероссийской Школы-коллоквиума по стохастическим методам (Дагомыс–Сочи, 19 сентября–9 октября 2022 г.)

Все распределения, характеризуемые операторами (20)–(23), являются членами семейства Пирсона в непрерывном случае или семейства Орда — в дискретном [24, 1]. В известном смысле несколько особняком стоит характеристическое тождество для кругового закона

$$\mathcal{A}_{\text{Semicircle}(2)} = \mathcal{X}^2 \mathcal{D} + 3 \mathcal{X} - 4 \mathcal{D}$$

с радиусом 2 (ср. [8, формула 3.1]).

Благодарность. Выражаю в заключение свою искреннюю благодарность В. Г. Михайлову, предложившему весьма дельное усовершенствование первоначального варианта рукописи, способствующее большей ясности изложения, а также обратившему внимание автора на ряд полезных литературных источников по теме работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Afendras G., Balakrishnan N., Papadatos N.* Orthogonal polynomials in the cumulative Ord family and its application to variance bounds. — *Statistics*. 2018, v. 52, is. 2, p. 364–392.
2. *An Introduction to Stein's Method.* /Ed. by *A. D. Barbour, L. H. Y. Chen.* Singapore: Singapore Univ. Press/World Sci. Publ., 2005. (Ser. Lect. Notes. V. 4.)
3. *Chen L. H. Y.* Poisson approximation for dependent trials. — *Ann. Probab.*, 1975, v. 3, № 3, p. 535–545.
4. *Diaconis P.* Stein's method for Markov chains: first examples. In: *Stein's Method: Expository Lectures and Applications.* / Ed. by *P. Diaconis, S. Holmes.* Beachwood, Ohio: Inst. Math. Statist., 2004, p. 27–43. (Ser. Inst. Math. Statist. Lect. Notes–Monograph ser. V. 46.)
5. *Feller W.* *An Introduction to Probability Theory and Its Applications.* V. II. 2nd ed. N. Y. etc.: Wiley, 1971, xxvi+669 p.
6. *Goldstein L., Reinert G.* Distributional transformations, orthogonal polynomials, and Stein characterizations. — *J. Theoret. Probab.*, 2005, v. 18, № 1, p. 237–260. // *Гольдштейн Л., Райнерт Г.* Преобразования распределений, ортогональные многочлены и характеристики Стейна. — *Обзорные прикл. и промышл. матем.*, 2006, т. 13, в. 1, с. 28–50. (Русск. перев.)
7. *Goldstein L., Reinert G.* Stein's method for the Beta distribution and the Pólya–Eggenberger urn. — *J. Appl. Probab.*, 2013, v. 50, № 4, p. 1187–1205.
8. *Götze F., Tikhomirov A. N.* Limit theorems for spectra of random matrices with martingale structure. — *Theory Probab. Appl.*, 2007, v. 51, is. 1, p. 42–64. // *Теория вероятн. и ее примен.*, 2006, т. 51, в. 1, p. 171–192.
9. *Grenander U.* Вероятности на алгебраических структурах. /Пер. с англ. А. А. Петрова под ред. Ю. В. Прохорова. М.: Мир, 1965, 275 с. // *Grenander U.* Probabilities on Algebraic Structures. N. Y.–London: Wiley, 1963, 218 p.
10. *Хейер Х.* Вероятностные меры на локально-компактных группах. /Пер. с англ. В. Г. Миранцева, С. А. Молчанова, В. В. Ульянова под ред. В. В. Сазонова. М.: Мир, 1981, 701 с. // *Heyer H.* Probability Measures on Locally Compact Groups. Berlin–Heidelberg: Springer, 1977, x+532 p.
11. *Holmes S.* Stein's method for birth and death chains. In: *Stein's Method: Expository Lectures and Applications.* / Ed. by *P. Diaconis, S. Holmes.* Beachwood, Ohio: Inst. Math. Statist., 2004, p. 45–67. (Ser. Inst. Math. Statist. Lect. Notes–Monograph ser. V. 46.)

12. *Hudson H. M.* A natural identity for exponential families with applications in multiparameter estimation. — *Ann. Statist.*, 1978, v. 6, № 3, p. 473–484.
13. *Kattumannil S. K.* On Stein Identity and Its Application. *Statist. Probab. Lett.*, 2009, v. 79, is. 12, p. 1444–1449.
14. *Kolmogorov A. N., Fomin S. V.* Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis. 4th ed., revised. Moscow: Fizmatlit, 1976, 544 p. (In Russian.)
15. *Ley N., Reinert G., Swan Y.* Stein’s method for comparison of univariate distributions. — *Probab. Surveys*, 2017, v. 14, p. 1–52.
16. *Ley L., Swan Y.* A general parametric Stein characterization. — *Statist. Probab. Lett.*, 2016, v. 111, is. 3, p. 67–71.
17. *Ley L., Swan Y.* A unified approach to Stein characterizations. — arXiv: 1105.4925v3 2011, 28 p. <https://archive.org/details/arxiv-1105.4925>
18. *Liu J. S.* Siegel’s formula via Stein’s identities. — *Statist. Probab. Lett.*, 1994, v. 21, is. 3, p. 247–251.
19. *Marcinkiewicz J.* Sur une propriété de la loi de Gauss. — *Math. Z.*, 1938, v. 44, p. 612–618.
20. *Prakasa Rao B. L. S.* Characterizations of distribution through some identities. — *J. Appl. Probab.*, 1979, v. 16, № 4, p. 903–909.
21. *Reinert G.* Three general approaches to Stein’s method. In: *An Introduction to Stein’s method*. Lect. Notes Ser. Inst. Math. Sci. Nat. Univ. Singapore. V. 4. Singapore: Singapore Univ. Press, 2005, p. 183–221.
22. *Ross N.* Fundamentals of Stein’s method. — *Probab. Surveys*, 2011, v. 8, p. 210–293.
23. *Reinert G., Röllin A.* Multivariate normal approximation with Stein’s method of exchangeable pairs under a general linearity condition. — *Ann. Probab.*, 2009, v. 37, № 6, p. 2150–2173.
24. *Schoutens W.* Orthogonal polynomials in Stein’s method. — *J. Math. Anal. Appl.*, 2001, v. 253, p. 515–531.
25. *Stein C.* A bound for the error in the normal approximation to the distribution of a sum of dependent random variables. — In: *Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*. V. II. Probability Theory. Berkeley, CA: Univ. California Press, 1972, p. 583–602.
26. *Stein C.* *Approximate Computation of Expectations*. Hayward, CA: Inst. Math. Statist., Beachwood, Ohio: Inst. Math. Statist., 1986, iii+164 p. (Ser. Inst. Math. Statist. Lect. Notes–Monograph ser. V. 7.)
27. *Teerapabolarn K.* Stein’s identity for discrete distributions. — *Internat. J. Pure Appl. Math.*, 2013, v. 83, № 4, p. 565–573.
28. *Висков О. В., Максимов В. М., Хохлов В. И.* Аннуляторы, пред-аннуляторы и характеризаторы вероятностных мер. — В сб.: *Международная научная конференция «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения–V»*. Материалы конференции. (Ростов-на-Дону, 26 апреля–1 мая 2015 г.). / Под ред. А. Н. Карапетянца и др. Ростов-на-Дону: Изд. центр ДГТУ, 2015, с. 178–180. // *Viskov O. V., Maksimov V. M., Khokhlov V. I.* Annulators, pre-annulators and characterizers of probabilistic measures. — In: *International Conference “Modern Methods, Problems and Applications of Operator Theory and Harmonic Analysis—V”* (Rostov-on-Don, 26 April – 1 May 2015). Ed. by A. N. Karapetyants et al. Rostov-on-Don: DSTU Publ. Center, 2015, p. 178–180. (In Russian.)
29. *Viskov V. M., Maksimov M. V., Khokhlov V. I.* Characterization properties of Liu identity for multidimensional Gaussian distribution and Wey–Zhang–Li identity for Beta distribution. — In: *8 International Congress on Industrial and Applied Mathematics. Program and Abstracts* (Beijing, August 10–14, 2015). Section MS-Th-E-12-3. /Ed. by Z. Ma, L. Guo. Beijing: Beijing Univ., 2015, p. 257.

30. Висков О. В., Максимов В. М., Хохлов В. И. Характеризационное свойство тождества Вэй–Жанг–Ли для бета-распределения. — *Обзор прикл. и промышл. матем.*, 2015, т. 22, в. 4, с. 447–449. // *Viskov O. V., Maksimov V. M., Khokhlov V. I. Characterization property of Wey–Zhang–Li identity for Beta distribution.* — *OP&PM Surveys Appl. Industr. Math.*, 2015, v. 22, is. 4, p. 447–449. (In Russian.)
31. Висков О. В., Максимов В. М., Хохлов В. И. Характеризации типа Стейна–Чена одномерных вероятностных распределений (новая редакция). — *Обзор прикл. и промышл. матем.*, 2020, т. 27, в. 4, с. 289–306. // *Viskov O. V., Maksimov V. M., Khokhlov V. I. Stein–Chen-like characterizations of one-dimensional probability distributions. (New edition.)* — *OP&PM Surveys Appl. Industr. Math.*, 2020, v. 27, is. 4, p. 289–306. (In Russian.)
32. Висков О. В., Прохоров Ю. В., Хохлов В. И. Характеризационное тождество для распределения Паскаля. — *Обзор прикл. и промышл. матем.*, 2013, т. 20, в. 4, с. 532–533. // *Viskov O. V., Prokhorov Yu. V., Khokhlov V. I. Characterizing identity for Pascal distribution.* — *OP&PM Surveys Appl. Industr. Math.*, 2013, v. 20, is. 4, p. 532–533. (In Russian.)
33. Висков О. В., Прохоров Ю. В., Хохлов В. И. Характеризационное тождество для биномиального распределения. — *Обзор прикл. и промышл. матем.*, 2013, т. 20, в. 2, с. 136–137. // *Viskov O. V., Prokhorov Yu. V., Khokhlov V. I. Characterizing identity for the binomial distribution.* — *OP&PM Surveys Appl. Industr. Math.*, 2013, v. 20, is. 2, p. 136–137. (In Russian.)
34. Волгин А. В. Об оценке точности многомерной нормальной аппроксимации сумм локально зависимых случайных векторов. — *Обзор прикл. и промышл. матем.*, 2015, т. 22, в. 4, с. 385–402. // *Volgin A. V. Accuracy of multidimensional normal approximation for sums of locally dependent random vectors.* — *OP&PM Surveys Appl. Industr. Math.*, 2015, v. 22, is. 4, p. 385–402. (In Russian.)
35. Wey Zh., Zhang X., Li T. On Stein identity, Chernoff inequality, and orthogonal polynomials. — *Commun. Statist. Theory Methods*, 2010, v. 39, is. 14, p. 2573–2593.
36. Висков О. В., Максимов В. М., Хохлов В. И. Характеризационные моментные тождества для равномерного и равномерного распределений. — *Обзор прикл. и промышл. матем.*, 2015, т. 22, в. 1, с. 64–65. // *Viskov O. V., Maksimov V. M., Khokhlov V. I. Characterizing moment identities for the uniform and equiprobable distribution.* — *OP&PM Surveys Appl. Industr. Math.*, 2015, v. 22, is. 1, p. 64–65. (In Russian.)

Поступила в редакцию
27.VIII.2022³⁾

UDC 519.2

DOI https://doi.org/10.52513/08698325_2022_29_1_7

Khokhlov V. I. (Moscow, Steklov Mathematical Institute of RAS). “**Seventh chord**” of methods for searching characterizing moment identities and the fifth element. (Dedicated to 50th anniversary of Stein’s method.)

Abstract: A new method elaborated for obtaining Stein-like moment characterizing identities is founded and expounded in the framework of four methods which were known earlier. The method is based on the functional-operator approach.

Keywords: annihilator of probability measure, generating operator, moment operator, orthogonal polynomial, characterizer of the probability measure, characterizing identity, Stein–Chen-like characterization.

³⁾ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке (20% оклада) по плану НИР ФГБУН Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук (МИАН, директор — ак. Д. В. Трещев) на 2021–2023 годы в рамках госзадания «Проведение фундаментальных научных исследований (Фундаментальные научные исследования для долгосрочного развития и обеспечения конкурентноспособности общества и государства (47 ГП))», П. 1.1.1 (№ 0014-2019-0020), № гос. рег. АААА-А19-119102590042-6.